《数值分析》9

主要内容：

- 高斯-赛德尔迭代收敛性
- 超松驰迭代算法
- 分块矩阵的块迭代
- 温度场问题计算实验

高斯-赛德尔迭代收敛性

矩阵分裂: $A = D - U - L$

Jacobi 迭代法迭代矩阵 $B_J = D^{-1}(U+L)$

特征方程: $|\lambda D - (U+L)| = 0$

Gauss-Seidel迭代法矩阵: $B_{G\text{-}S} = (D - L)^{-1}U$

特征多项式:

$$|\lambda I - (D - L)^{-1}U| = |(D - L)^{-1}| \cdot |\lambda(D - L) - U|$$

特征方程: $|\lambda(D - L) - U| = 0$

引理1: 如果A是严格主对角占优矩阵, 则 $\det(A) \neq 0$.

证: 用反证法。

设$\det(A) = 0$, 则齐次方程组$Ax=0$有非零解 $u = [u_1, u_2, \cdots, u_n]^T$.

设 $\|u\|_\infty = |u_k|$ ，考虑$Au = 0$的第k个等式 →

$$a_{k1}u_1 + \cdots + a_{kk}u_k + \cdots + a_{kn}u_n = 0$$

$$|a_{kk}| \cdot |u_k| = \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{kj}u_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}u_j| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}| \cdot |u_k|$$

两边约去 $|u_k|$，得 $|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$

这与主对角占优矛盾, 故$\det(A) \neq 0$。

定理2: 若A 是严格主对角占优矩阵，则求解方程组$AX=b$ 的高斯–赛德尔迭代法收敛。

证： 高斯–赛德尔迭代矩阵为$(D-L)^{-1}U$, 该矩阵的特征方程为

$$|\lambda(D-L)-U|=0$$

行列式对应的矩阵为

$$C(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

当$|\lambda|>=1$时，利用A矩阵的主对角占优性质，得

高斯-赛德尔迭代收敛性

$$|\lambda a_{ii}| = |\lambda| \times |a_{ii}| > |\lambda| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |\lambda| \times |a_{ij}| \geq \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$$

故$C(\lambda)$也是严格主对角占优矩阵。由于严格主对角占优矩阵的行列式不为零，故λ不是特征方程

$$C(\lambda) = |\lambda(D - L) - U| = 0$$

的根（矛盾！）。

所以当A是严格主对角占优矩阵时, $(D-L)^{-1}U$的特征值必然满足：

$$|\lambda| < 1,$$

从而高斯-赛德尔迭代矩阵谱半径小于1，迭代法收敛。

定理3: 方程组 $Ax=b$ 中, 若 A 是实对称正定矩阵,则Gauss-Seidel迭法收敛

证明：由 $A = D - L - L^T$ ➔ $B_{G\text{-}S} = (D - L)^{-1}L^T$

设λ为$B_{G\text{-}S}$的任一特征值, x 为其特征向量,则

$$(D-L)^{-1}L^T x = \lambda x \quad \Rightarrow \quad L^T x = \lambda (D-L) x$$

$$\Rightarrow \quad x^T L^T x = \lambda x^T (D-L) x$$

A 正定,故 $p = x^TDx>0$, 记 $x^TL^Tx = a$, 则有

$x^TAx=x^T(D - L - L^T)x=p - a - a =p - 2a >0$

$$(p-a)^2 = p^2 - 2ap + a^2 = p(p-2a) + a^2$$

高斯-赛德尔迭代收敛性

$$\lambda = \frac{x^T L^T x}{x^T (D-L)x} = \frac{a}{p-a}$$

$$\lambda^2 = \frac{a^2}{p^2 - 2pa + a^2} = \frac{a^2}{p(p-2a)+a^2} < 1$$

所以, 迭代矩阵 $B_{G\text{-}S}$ 的谱半径 $\rho(B_{G\text{-}S}) < 1$,

$\Rightarrow$ 方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 是实对称正定矩阵时, Gauss-Seidel迭代法收敛.

称 $R = -\ln \rho(B)$ 为迭代法的渐近收敛速度.

(谱半径越小越快)

思考：$||B||$ 越小越快

超松驰(SOR)迭代法

为什么:
对GS进一步加速!

Gauss-Seidel迭代格式

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}]$$

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}]$$

$$X^{(k+1)} = (1-\omega)X^{(k)} + \omega D^{-1}(LX^{(k+1)} + UX^{(k)} + b)$$

$$B_{SOR} = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$$

如果: $w = 1$? => GS

超松驰迭代算法

successive overrelaxation

Prof. David M. Young

1954 美国数学科学学报

Iterative methods for solving partial differential equations of elliptic

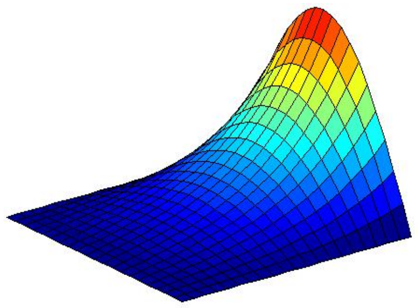
定理4: 若 A 是对称正定矩阵, 则当 $0<\omega<2$ 时

SOR 迭代法解方程组 $Ax=b$ 是收敛的

最佳松驰因子选取 $$\omega=\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(B_J)^2}}$$

$\rho(B_J)$ 为Jacobi迭代谱半径 （记住）

平面温度场问题: $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x,y<1 \\ u(0,y)=u(x,0)=u(x,1)=0 \\ u(1,y)=\sin \pi y \end{cases}$



令 $h=1/(n+1)$, $x_j = jh, y_j = jh \quad (i, j = 0,1,\cdots,n+1)$

记 $u_{i,j} = u(x_i, y_j), \quad (i, j = 0,1,\cdots,n+1)$

$$u_{i-1,j}+u_{i,j-1}-4u_{ij}+u_{i+1,j}+u_{i,j+1}=0 \quad (i,j=1,\cdots,n)$$

线性方程组

$$u_{i-1,j}+u_{i,j-1}-4u_{ij}+u_{i+1,j}+u_{i,j+1}=0$$

$$u_{i,0}=0, \quad u_{i,n+1}=0 \qquad (i,j=1,\cdots,n)$$

$$u_{0,j}=0, \qquad u_{n+1,j}=\sin \pi y_j$$

Jacobi迭代格式

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)})$$

Seidel迭代格式

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} + u_{i,j+1}^{(k)})$$

SOR迭代格式

$$u_{i,j}^{(k+1)} = (1-\omega)u_{ij}^{(k)} + \frac{\omega}{4}(u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} + u_{i,j+1}^{(k)})$$

平面温度场问题➔ $AU=F$ ➔ $\begin{cases} B_J \\ B_{GS} \\ B_{SOR} \end{cases}$

$$\rho(B_J)=\cos(h\pi)$$

$$\rho(B_{G-S})=[\cos(h\pi)]^2$$

$$\rho(B_{SOR})=\frac{1-\sin(h\pi)}{1+\sin(h\pi)}$$

n	$\rho(B_J)$	$\rho(B_{G-S})$	$\rho(B_{SOR})$	ω_{op}
4	0.8090	0.6545	0.2596	1.2596
8	0.9397	0.8830	0.4903	1.4903
16	0.9830	0.9662	0.6895	1.6895
32	0.9955	0.9910	0.8264	1.8264
64	0.9988	0.9977	0.9078	1.9078

Gauss-Seidel迭代实验 （误差限10^{-8}）:

结点数n^2	10^2	20^2	40^2
迭代次数	182	606	2077
CPU时间(s)	0.97	4.328	58.531
误差	0.0023	6.4274e-4	1.6814e-4

SOR迭代实验（误差限10^{-8}）:

结点数n^2	10^2	20^2	40^2
迭代次数	40	74	137
CPU时间(s)	0.11	0.6560	4.9530
误差	0.0023	6.4306e-4	1.6944e-4

块迭代法简介

设 $A \in R^{n\times n}, x \in R^n, b \in R^n$

将方程组 $Ax=b$ 中系数矩阵 A 按行列分块

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_r \end{bmatrix}$$

其中, $A_{ii} \in R^{ni\times ni}, A_{ij} \in R^{ni\times nj}, x_i \in R^{ni}, b_i \in R^{ni}$

将A分解, $A=D_B-L_B-U_B$

(1) Jacobi块迭代

$$D_B X^{(k+1)}=(L_B+U_B)X^{(k)}+b$$

$$A_{ii}X_i^{(k+1)}=B_i-\underline{\sum_{j\neq i}A_{ij}X_j^{(k)}} \qquad (i=1,2,\cdots,r)$$

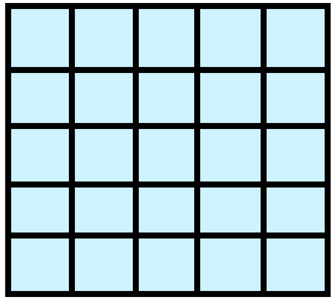
(2)Gauss-Seidel块迭代

$$D_B X^{(k+1)}=L_B X^{(k+1)}+U_B X^{(k)}+b$$

$$A_{ii}X_i^{(k+1)}=b_i-\underline{\sum_{j=1}^{i-1}A_{ij}X_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{r}A_{ij}X_j^{(k)}}$$

$(i=1,2,\cdots,r)$

边值问题:
$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x,y<1 \\ u(0,y)=u(x,0)=u(x,1)=0 \\ u(1,y)=\sin \pi y \end{cases}$$



$$u_{i-1,j}+u_{i,j-1}-4u_{ij}+u_{i+1,j}+u_{i,j+1}=0 \qquad (i,j=1,\cdots,n)$$

$$AU=F \qquad A=\begin{bmatrix} B & I & & \\ I & B & I & \\ & I & B & I \\ & & I & B \end{bmatrix} \qquad U=\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \qquad F=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} -4 & 1 & & \\ 1 & -4 & 1 & \\ & 1 & -4 & 1 \\ & & 1 & -4 \end{bmatrix} \qquad U_1=\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{41} \end{bmatrix}, \cdots\cdots, \quad U_4=\begin{bmatrix} u_{14} \\ u_{24} \\ u_{34} \\ u_{44} \end{bmatrix}$$

分块矩阵的块迭代

$$\begin{bmatrix} B_1 & I & & \\ I & B_2 & I & \\ & I & B_3 & I \\ & & I & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ I & B_2 & & \\ & I & B_3 & \\ & & I & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & I & & \\ & & I & \\ & & & I \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad B_1 U_1^{(k+1)} = -U_2^{(k)} + F_1$$

$$\Rightarrow \quad B_2 U_2^{(k+1)} = -U_1^{(k+1)} - U_3^{(k)} + F_2$$

$$\Rightarrow \quad B_3 U_3^{(k+1)} = -U_2^{(k+1)} - U_4^{(k)} + F_3$$

$$\Rightarrow \quad B_4 U_4^{(k+1)} = -U_3^{(k+1)} + F_4$$

五点差分格式块Gauss-Seidel迭代实验 (误差限:1e-008)

n^2	10^2	20^2	40^2
迭代次数	107	339	1135
CPU时间(s)	0.3750	4.3750	58.0470
误差	0.0023	6.42e-4	1.68e-4

五点差分格式Gauss-Seidel迭代实验 (误差限:1e-008)：

结点数n^2	10^2	20^2	40^2
迭代次数	182	606	2077
CPU时间(s)	0.97	4.328	58.531
误差	0.0023	6.42e-4	1.68e-4

小结(大规模稀疏线性系统迭代法求解)

三种迭代格式：
雅克比、高斯赛德尔、超松弛(高斯赛德尔为基础)。

收敛性分析(五个角度去思考):

- 是否迭代矩阵B的范数小于1？
- 是否迭代矩阵B的极限为零矩阵？
- 是否系数矩阵A为严格对角占优？
- 是否迭代矩阵B的谱半径小于1？
- 是否系数矩阵A为实对称正定？（针对GS迭代）

参考资料

[1] Applied Iterative Methods,.1981

[2]实用迭代法,蔡大用、施妙根译1984,清华

[3]Iterative Solution of Large Linear systems, David M. Young, 1971.

[4]David M. Young主页：
http://www.cs.utexas.edu/users/young/

学到了什么?

高斯-赛德尔迭代收敛性

超松驰迭代算法

分块矩阵的块迭代

温度场问题计算实验