《数值分析》8

主要内容：

- 向量序列收敛性
- 迭代法收敛性条件
- 迭代误差估计定理

向量序列收敛性

平面点列: $\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix}$ …… $\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix}$ ……

$$\lim_{k\to\infty}\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} \iff \lim_{k\to\infty}\sqrt{(x_1^{(k)}-x_1^*)^2+(x_2^{(k)}-x_2^*)^2}=0$$

$$X^{(k)}\in R^n:\quad X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(k)}, \cdots\cdots$$

$$\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = X^* \iff \lim_{k\to\infty} \| X^{(k)} - X^* \|_2 = 0$$

利用向量范数等价性, 对任意范数 $\|\cdot\|$

$$\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = X^* \iff \lim_{k\to\infty} \| X^{(k)} - X^* \| = 0$$

向量序列收敛性

$$AX = b \Rightarrow (M-N)X = b \Rightarrow MX = NX + b$$

计算格式: $X^{(k+1)} = BX^{(k)} + f \quad (B = M^{-1}N)$

设方程组的精确解为 X^*,则有

$$X^* = BX^* + f \quad \Rightarrow$$

$$X^{(k+1)} - X^* = B(X^{(k)} - X^*)$$

记 $\varepsilon^{(k)} = X^{(k)} - X^* \quad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

则有 $\varepsilon^{(k+1)} = B\varepsilon^{(k)}$

$$\varepsilon^{(k)} = B\varepsilon^{(k-1)} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

定理1: 若$\|B\|<1$, 则迭代法 $X^{(k+1)}=B\,X^{(k)}+f$ 收敛

证: 由$\varepsilon^{(k)}=B\,\varepsilon^{(k-1)}$,得

$$\|\varepsilon^{(k)}\|\le\|B\|\,\|\varepsilon^{(k-1)}\| \qquad (k=1,2,3,\cdots\cdots)$$

$$\Rightarrow \quad \|\varepsilon^{(k)}\|\le\|B\|^k\,\|\varepsilon^{(0)}\|$$

$$\|B\|<1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty}\|\varepsilon^{(k)}\|\le\lim_{k\to\infty}\|B\|^k\|\varepsilon^{(0)}\|=0$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon^{(k)}=0$

迭代法收敛性条件

定理2: 迭代格式 $X^{(k+1)}=B X^{(k)}+f$ 序列收敛的充分必要条件是:

$$\lim_{k\to\infty} B^k = 0$$

证明: **(必要性)** 设X* 为方程组(I - B)X = f 的精确解,
即: $X^*=B X^*+f$

两式相减: $X^{(k+1)}-X^*=B\,(X^{(k)}-X^*)$; 设 $e^{(k+1)}=X^{(k+1)}-X^*$

则有: $e^{(k+1)}=B^{(k+1)}e^{(0)}$ $\Rightarrow$ $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$

(充分性) 因为 $(I-B)(I+B+B^2+\cdots\cdots+B^k)=I-B^{k+1}$ 则有:
$(I-B)^{-1}(I-B^{k+1})=(I+B+B^2+\cdots\cdots+B^k)$

$X^{(k+1)}=B X^{(k)}+f=B(B X^{(k-1)}+f)+f=\cdots\cdots=B^{k+1}X^{(0)}+(I+B+\cdots\cdots+B^k)f$ 因为 $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$

$\Rightarrow$ $\lim X^{(k)}=(I-B)^{-1}f$,即序列收敛至(I - B)X = f 的解

迭代法收敛性条件

定义4.1： $A=(a_{ij})_{n\times n}$，如果 $|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$

则称A为严格对角占优阵.

定理3：若$Ax=b$的系数矩阵 A 是严格对角占优矩阵,则Jacobi迭代收敛.

证: 由于矩阵 A 严格对角占优

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|<1$$

而 $$B_J=D^{-1}(D-A)=\begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

迭代法收敛性条件

故Jacobi迭代矩阵$B_J = D^{-1}(D-A)$ 第 i 行绝对值求和

$$\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|<1 \qquad (i=1,2,\cdots n)$$

所以 $\|B_J\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\{\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\}<1$

故Jacobi迭代 $X^{(k+1)} = B_J X^{(k)} + f$ 收敛.

矩阵B 的谱

设n阶方阵B 的n个特征值为: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

则称集合 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ 为B 的谱. 记为 ch B

特征值取模最大

矩阵B的谱半径 $\rho(B) = \max\limits_{1\le k\le n} |\lambda_k|$

注1: 当B是对称矩阵时, $\|B\|_2 = \rho(B)$

注2: 对 $R^{n\times n}$ 中的范数$\|\cdot\|$,有

$$\rho(B) \le \| B \|$$

迭代误差估计定理

定理4： 迭代法 $X^{(k+1)} = B X^{(k)} + f$ 收敛

$\Leftrightarrow$ 谱半径 $\rho(B) < 1$

迭代矩阵谱半径的计算是十分困难的，因而用谱半径判别迭代的收敛性很不方便，可用一些其他实用的判别条件。但**迭代矩阵谱半径常用于理论证明。**

迭代误差估计定理

定理5: 设X^*为方程组 $AX=b$ 的解

若$\|B\|<1$,则对迭代格式 $X^{(k+1)} = B X^{(k)} + f$ 有

$$(1)\quad \| X^{(k)} - X^* \| \le \frac{\| B \|}{1-\| B \|} \| X^{(k)} - X^{(k-1)} \|$$

$$(2)\quad \| X^{(k)} - X^* \| \le \frac{\| B \|^k}{1-\| B \|} \| X^{(1)} - X^{(0)} \|$$

证 由$\|B\|<1$,有 $\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = X^*$

$$X^{(k+1)} - X^* = B(X^{(k)} - X^*)$$

$$\| X^{(k+1)} - X^* \| \le \|B\| \, \| X^{(k)} - X^* \|$$

迭代误差估计定理

$$\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| = \|(X^* - X^{(k)}) - (X^* - X^{(k+1)})\|$$

$$\geq \|(X^* - X^{(k)})\| - \|(X^* - X^{(k+1)})\|$$

$$\geq \|(X^* - X^{(k)})\| - \|B\| \, \|(X^* - X^{(k)})\|$$

$$= (1 - \|B\|) \, \|(X^* - X^{(k)})\|$$

$$\Rightarrow \quad \|X^{(k)} - X^*\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|} \|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|$$

$$\Rightarrow \quad \|X^{(k)} - X^*\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|$$

$$\Rightarrow \quad \|X^{(k)} - X^*\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|$$

收敛性小结(5个定理)

定理1: 若$\|B\|<1$, 则迭代法 $X^{(k+1)}=B X^{(k)}+f$ 收敛

定理2: 迭代格式 $X^{(k+1)}=B X^{(k)}+f$ 序列收敛的充分必要条件是:

$$\lim_{k\to\infty} B^k = 0$$

定理3: 若$Ax=b$的系数矩阵 A 是严格对角占优矩阵,则Jacobi迭代收敛.

定理4: 迭代法 $X^{(k+1)} = B X^{(k)} + f$ 收敛

$\Leftrightarrow$ 谱半径$\rho(B) < 1$

迭代误差估计定理

定理5: 设X^*为方程组 $AX=b$ 的解

若||B||<1,则对迭代格式 $X^{(k+1)} = B X^{(k)} + f$ 有

$$(1)\quad \| X^{(k)} - X^* \| \le \frac{\| B \|}{1 - \| B \|} \| X^{(k)} - X^{(k-1)} \|$$

$$(2)\quad \| X^{(k)} - X^* \| \le \frac{\| B \|^k}{1 - \| B \|} \| X^{(1)} - X^{(0)} \|$$

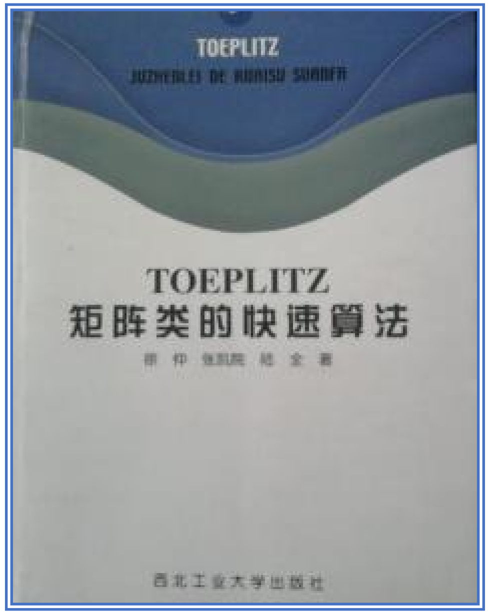
迭代误差估计定理

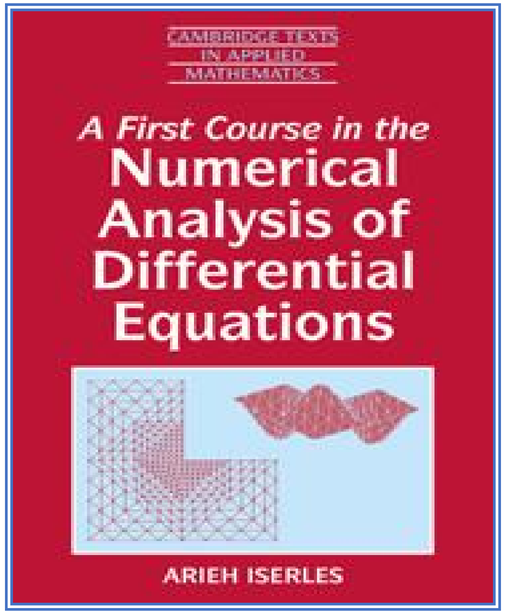
参考资料

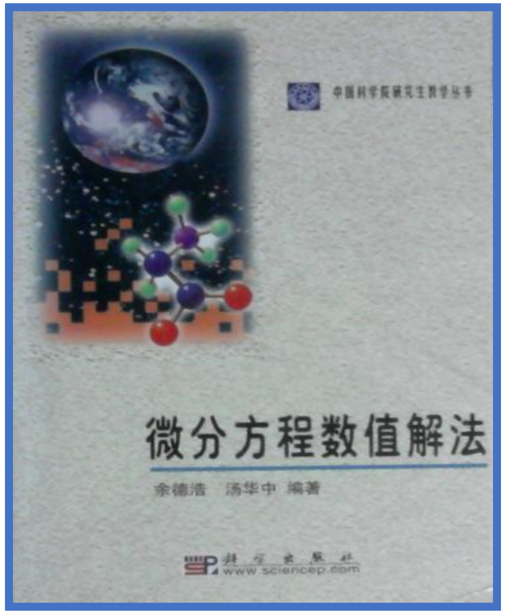
[1]张凯院,Toeplitz矩阵快速算法

[2]Numerical Analysis of Differential Eq.

[3]余德浩，微分方程数值解法







学到了什么?

向量序列收敛性

迭代法收敛性条件

迭代误差估计定理