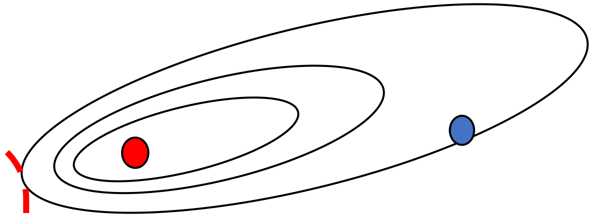
《数值分析》5
—解线性方程组的直接法

主要内容：

- 方程组化简—消元过程
- 高斯消元法及算法实现
- 矩阵初等变换与高斯变换
- Frobenius矩阵与LU分解

方程组化简—消元过程



➢线性方程组的矩阵形式

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

$$(\, i=1,2,\cdots,n \,)$$

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n
\end{bmatrix}
$$

$$AX = b$$

$$X\,? \rightarrow b$$

线性方程组求解:

1. 直接方法;
2. 基本迭代法;
3. 子空间方法

方程组化简—消元过程

例

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4=13 \\ 2x_1+0x_2+4x_3+3x_4=28 \\ 4x_1+2x_2+2x_3+x_4=20 \\ -3x_1+x_2+3x_3+2x_4=6 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13 \\ 28 \\ 20 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4=13 \\ \quad -4x_2+2x_3-5x_4=2 \\ \quad\quad -5x_3-7.5x_4=-35 \\ \quad\quad\quad -9x_4=-18 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ & -4 & 2 & -5 \\ & & -5 & -7.5 \\ & & & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ -35 \\ -18 \end{bmatrix}$$

$$x_4=2,\ x_3=4,\ x_2=-1,\ x_1=3 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

➢解线性方程组的克莱姆方法

1. 输入矩阵 A 和右端向量 b;

2. 计算 A 的行列式 D,如果 $D=0$,则输出错信息结束,否则进行 3 ;

3. 对 $k=1,2,\cdots,n$ 用 b 替换 A 的第 k 列数据,并计算替换后矩阵的行列式值 D_k;

4. 计算并输出 $x_1 = D_1 / D,\cdots, x_n=D_n/D$, 结束。

高斯消元法

第一步：将方程组化简为三角形方程组；

第二步：解三角形方程组，获方程组的解。

高斯消元法及算法实现

➢解上三角方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (a_{11}\ldots a_{nn}\neq 0)$$

计算：$x_n = b_n / a_{nn}$

$$x_k = [b_k - (a_{k,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{k,n}x_n)] / a_{kk}$$

$$(k = n-1, \cdots, 1)$$

除法: n次；乘法: $n(n-1)/2$次,

乘、除法运算共 $n(n+1)/2$ 次, 简记为 $O(n^2)$

高斯消元法及算法实现

➢**消元过程**(化一般方程组为上三角方程组)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$$

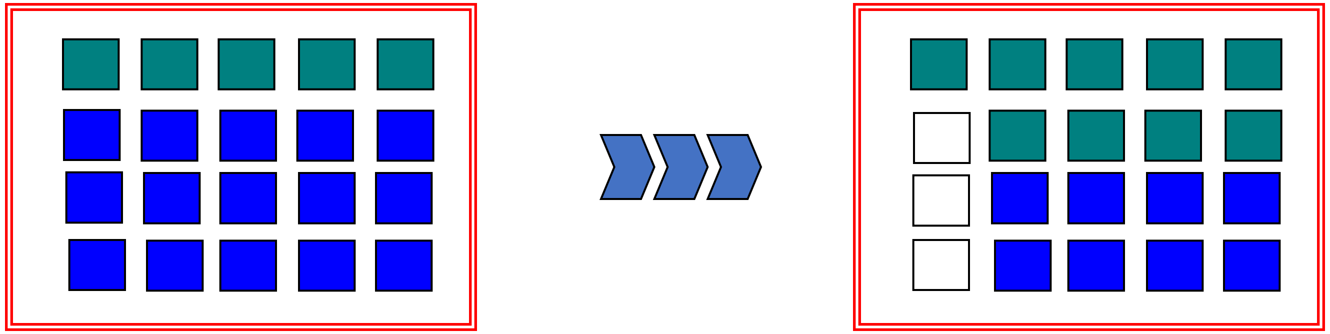
$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = b_3^{(2)} \\ \qquad\qquad\qquad a_{44}^{(3)}x_4 = b_4^{(3)} \end{cases}$$

高斯消元法及算法实现

增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{bmatrix}$$

计算: $[m_{21} \quad m_{31} \quad m_{41}]^T = [a_{21} \quad a_{31} \quad a_{41}]^T / a_{11}$

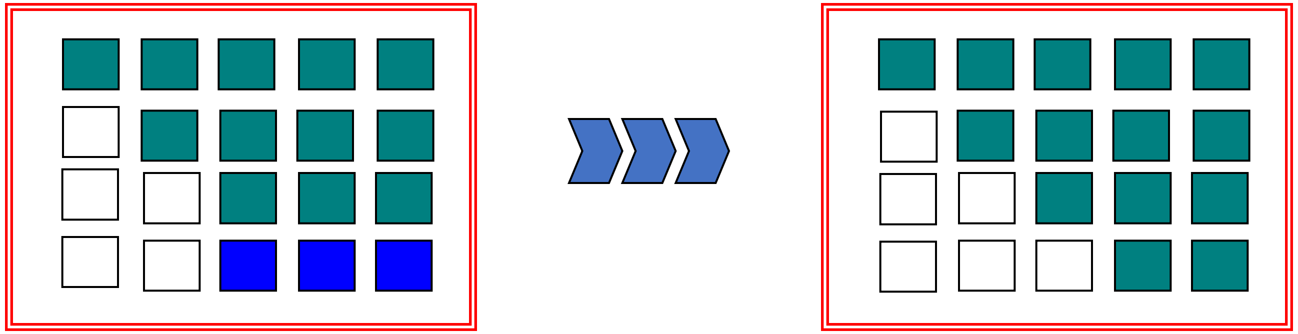


高斯消元法及算法实现

实现第一轮消元

$$\overline{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} & b_4^{(1)} \end{bmatrix}$$

计算: $[m_{32}\ \ m_{42}]^T = \ [a_{32}^{(1)}\ \ a_{42}^{(1)}] / a_{22}^{(1)}$



高斯消元法及算法实现

上三角方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ & & & a_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ b_4^{(3)} \end{bmatrix}$$

n阶方程组消元过程乘法次数:

$$(n\text{-}1)n+(n\text{-}2)(n\text{-}1)+\dots+1\times2=(n^3\text{-}n)/3$$

除法次数：$(n\text{-}1)+(n\text{-}2)+\dots+1=n(n\text{-}1)/2$

回代过程：$n(n+1)/2$　总：$n^2+(n^3\text{-}n)/3$, 简记 $O(n^3)$

n	2	3	4	5	6
高斯	6	17	36	65	106
克莱姆	8	51	364	2885	25206

高斯消元法算法：

1. For $k=1,\cdots,n\text{-}1$ Do
2. For $i=k+1,\cdots,n$ Do
3. $a_{ik} \leftarrow a_{ik} / a_{kk}$
4. For $j=k+1,\cdots,n$ Do
5. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} \times a_{kj}$
6. EndDo
7. $b_i \leftarrow b_i - a_{ik} \times b_k$
8. EndDo
9. EndDo

➢初等矩阵与Gauss变换

$$I=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}_{n\times n} \xrightarrow[\text{加到第二行}]{\text{第一行乘 } -m_{21}} E_2=\begin{bmatrix}1 & & & \\ -m_{21} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$E_3=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ -m_{31} & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{bmatrix}_{n\times n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad E_n=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ -m_{n1} & & & 1\end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$F_1=E_n\cdots E_3E_2I \rightarrow F_1=\begin{bmatrix}1 & & & \\ -m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -m_{n1} & & & 1\end{bmatrix}_{n\times n}$$

矩阵初等变换与高斯变换

$$F_1 = E_n \cdots E_3 E_2$$

第一轮消元： $A^{(1)} = F_1 A$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -m_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$F_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

关键：如何去找F_1

矩阵初等变换与高斯变换

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{bmatrix} [1 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0] = m_1 e_1^T$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -m_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I - m_1 e_1^T$$

$$F_1^{-1} = I + m_1 e_1^T$$

矩阵初等变换与高斯变换

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -m_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -m_{nk} & & & 1 \end{bmatrix} = I - m_k e_k^T$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$m_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_{k+1,k} \\ \vdots \\ m_{nk} \end{bmatrix} \qquad e_k^T = [\,0 \cdots 0\ 1\ 0 \cdots 0\,]$$

$$\boxed{F_k^{-1} = I + m_k e_k^T}$$

Frobenius矩阵与LU分解

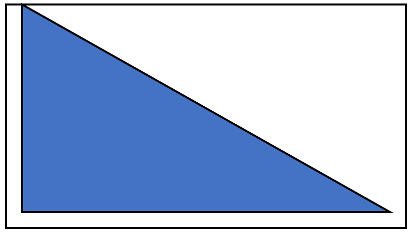
➢**Gauss消元结果**

$$A^{(n-1)} = F_{n\text{-}1}F_{n\text{-}2}\cdots\cdots F_1 A$$

$$F_k = I - m_k e_k^T \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

称F_k 为 Frobenius矩阵, $F_k^{-1} = I + m_k e_k^T$

$$F_1^{-1}F_2^{-1}\cdots\cdots F_{n\text{-}1}^{-1} =$$



$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots\cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & 1 & \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_{n-1}F_{n-2}\cdots\cdots F_1 A = A^{(n-1)} \quad \Rightarrow$$

$$A = \underbrace{(F_1^{-1}F_2^{-1} \cdots\cdots F_{n-1}^{-1})}_{L}\ \underbrace{A^{(n-1)}}_{U}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & 1 & \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

矩阵的三角分解： $A = L\,U$

Frobenius矩阵与LU分解

举例 用高斯消元法对如下系数矩阵A进行三角分解

$$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\3&5&2\\4&3&30\end{bmatrix}\xrightarrow[(-2)r_1+r_3]{(-3/2)r_1+r_2} F_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-\frac{4}{2}&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{3}{2}&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A^{(1)}=F_1A=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&\frac{1}{2}&-4\\0&-3&22\end{bmatrix}\xrightarrow{6r_2+r_3} F_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{3}{0.5}&1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A^{(2)}=F_2A^{(1)}=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&\frac{1}{2}&-4\\0&0&-2\end{bmatrix}\rightarrow F_2F_1A=A^{(2)}$$

$$\rightarrow A=(F_2F_1)^{-1}A^{(2)}=\underbrace{\boxed{F_1^{-1}F_2^{-1}}}_{L}\underbrace{\boxed{A^{(2)}}}_{U}$$

Frobenius矩阵与LU分解

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&4\\2&0&4&3\\4&2&2&1\\-3&1&3&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&4\\2&-4&2&-5\\4&-6&-2&-15\\-3&7&6&14\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&4\\2&-4&2&-5\\4&3/2&-5&-7.5\\-3&-7/4&19/2&21/4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&4\\2&-4&2&-5\\4&3/2&-5&-7.5\\-3&-7/4&-19/10&-9\end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix}1&&&\\2&1&&\\4&3/2&1&\\-3&-7/4&-19/10&1\end{bmatrix}\qquad U=\begin{bmatrix}1&2&1&4\\&-4&2&-5\\&&-5&-7.5\\&&&-9\end{bmatrix}$$

思考与练习

1. 分析Frobenius矩阵 $F_k = I - m_k e_k^T$ 的结构,证明$F_k^{-1} = I + m_k e_k^T$为其逆矩阵。
2. 证明“下三角矩阵的逆矩阵也是下三角矩阵”是否正确
3. 证明“两个下三角矩阵的乘积矩阵也是下三角矩阵”

2. 证明$(F_1^{-1}F_2^{-1} \cdots\cdots F_{n-1}^{-1})$ 是下三角矩阵

学到了什么?

- 方程组化简—消元过程
- 高斯消元法及算法实现
- 矩阵初等变换与高斯变换
- Frobenius矩阵与LU分解