# 《数值分析》3

**主要内容：**

- 不动点迭代法
- 不动点迭代的收敛性
- 迭代序列的收敛速度

# 不动点迭代法

迭代：将一个计算过程**反复进行**

迭代法：一类常见常用的计算技术

举例

方程： $x = \cos(x)$

- 构造有效的**迭代格式**
- 选取合适的**迭代初值**
- 对迭代格式进行**收敛性分析**

一简单迭代： $x_{n+1} = \cos(x_n)$ （$n$=1,2,3,…… ）

初值： $x_0$=0.5

# 不动点迭代法

**举例1：** 方程 $x^3+4x^2-10=0$ 在 [1, 2] 上有一个根，将方程变换成另一形式

(1) $x=\sqrt{10-x^3}/2$ $\quad \varphi(x)=\sqrt{10-x^3}/2$

$x_{n+1}=\varphi(x_n)$ ( $n$ = 0, 1, 2, ……)

$x_0=1.5$

(2) $x=\sqrt{10/(x+4)}$ $\quad \varphi(x)=\sqrt{10/(x+4)}$

$x_{n+1}=\varphi(x_n)$ ( $n$ = 0, 1, 2, ……)

$x_0=1.5$

唯一性？构造规律？构造有效？

# 不动点迭代法

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\sqrt{10-x_n^3}$$

| $n$ | $x_n$ | $\lvert x_{n+1}-x_n \rvert$ |
|---|---|---|
| 0 | 1.5000 | |
| 1 | 1.2870 | 2.1e-1 |
| 2 | 1.4025 | 1.1e-1 |
| 3 | 1.3455 | 5.7e-2 |
| 4 | 1.3752 | 2.9e-2 |
| 5 | 1.3601 | 1.5e-2 |
| 6 | 1.3678 | 7.7e-3 |
| 7 | 1.3639 | 3.9e-3 |
| 8 | 1.3659 | 2.0e-3 |
| 9 | 1.3649 | 1.0e-3 |
| 10 | 1.3654 | 5.3e-4 |

$$x_{n+1}=\sqrt{\frac{10}{x_n+4}}$$

| $n$ | $x_n$ | $\lvert x_{n+1}-x_n \rvert$ |
|---|---|---|
| 0 | 1.5000 | |
| 1 | 1.3484 | 1.5e-1 |
| 2 | 1.3674 | 1.8e-2 |
| 3 | 1.3650 | 2.4e-3 |
| 4 | 1.3653 | 3.0e-4 |
| 5 | 1.3652 | 3.9e-5 |
| 6 | 1.3652 | 4.9e-6 |

# 不动点迭代法

$f(x) = 0 \rightarrow x = \varphi(x)$

若存在 $x^*$, 使得 $x^* = \varphi(x^*)$ ，则称 $x^*$为 $\varphi(x)$ 的不动点

$\varphi(x)$ —— 迭代函数

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$

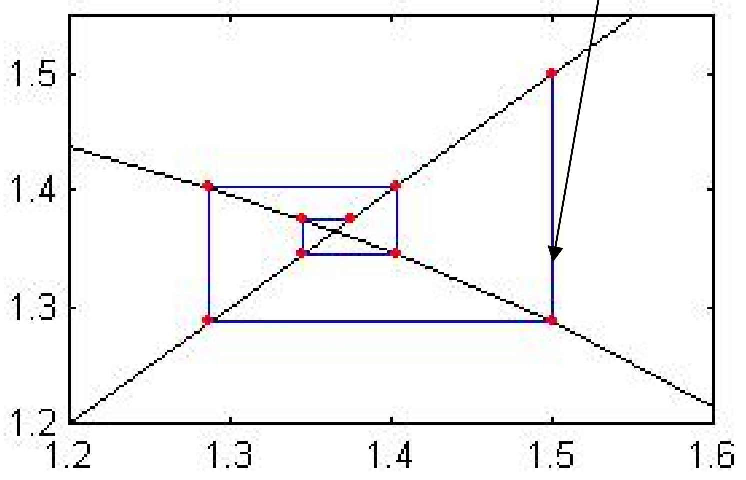
$$\rightarrow \begin{cases} y_n = \varphi(x_n) \\ x_{n+1} = y_n \end{cases}$$

$(x_n, y_n) \rightarrow (x_{n+1}, y_n)$

$\rightarrow (x_{n+1}, y_{n+1})$

…………

$\varphi(x) = \sqrt{10 - x^3}/2$




不动点迭代蛛网图

**引理2.1** 如果$\varphi(x)\in C^1[a,\ b]$,满足条件:

(1) $a\le\varphi(x)\le b$ ; (2) $|\varphi'(x)|\le L<1$

则 $\varphi(x)$ 在 [a, b] 有唯一的不动点 $x^*$

证: 1)若 $\varphi(a)=a$ 或$\varphi(b)=b$,显然 $\varphi(x)$有不动点

设 $\varphi(a)\neq a$ , $\varphi(b)\neq b$ 则有 $\varphi(a)>a$ , $\varphi(b)<b$

记 $\psi(x)=\varphi(x)-x$ 则有 $\psi(a)\cdot\psi(b)<0$

所以, 存在 $x^*$, 使得 $\psi(x^*)=0$

即 $x^*=\varphi(x^*)$ , 故 $x^*$ 是$\varphi(x)$ 的不动点.

2) 如果 $\varphi(x)$有两个不同的不动点 $x_1^* \neq x_2^*$ 则有

两式相减得 $x_1^* = \varphi(x_1^*)$ $x_2^* = \varphi(x_2^*)$

$$x_1^* - x_2^* = \varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*)$$

由**拉格朗日中值定理**知, 存在$\xi$ 介于 $x_1^*$ $x_2^*$之间, 使

$$x_1^* - x_2^* = \varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*) = \varphi'(\xi)(x_1^* - x_2^*)$$

➔ $|x_1^* - x_2^*| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x_1^* - x_2^*|$

➔ $|x_1^* - x_2^*| \le L \cdot |x_1^* - x_2^*|$

➔ $1 \le L$ （与 L<1 条件矛盾 ）

故不动点唯一。

# 不动点迭代的收敛性

**定理2.4** 如果 $|\varphi'(x)| \le L < 1$ ,满足条件:

(1) $a \le \varphi(x) \le b$ ； (2) $\varphi(x) \in C^1[a,\ b]$

则对任意的 $x_0 \in [a, b]$ , 迭代格式 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

产生的序列 $\{x_n\}$ 收敛到不动点 $x^*$ ,且有

$$|x^* - x_n| \le \frac{1}{1-L} |x_{n+1} - x_n|$$

证：

$$\begin{cases} x_n = \varphi(x_{n-1}) \\ x^* = \varphi(x^*) \end{cases} \rightarrow |x_n - x^*| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x_{n-1} - x^*|$$

$$\rightarrow |x_n - x^*| \le L |x_{n-1} - x^*|$$

# 不动点迭代的收敛性

$$|x_n - x^*| \le L^n |x_0 - x^*|$$

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x^*| \le \lim_{n\to\infty} L^n |x_0 - x^*| = 0 \quad (0<L<1)$$

所以, $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ 故迭代格式收敛

$$|x_n - x^*| = |x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x^*|$$

$$\le |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x^*| \le |x_n - x_{n+1}| + L|x_n - x^*|$$

$$\rightarrow \quad (1-L)|x_n - x^*| \le |x_n - x_{n+1}|$$

$$\rightarrow \quad |x^* - x_n| \le \frac{1}{1-L} |x_{n+1} - x_n|$$

## 不动点迭代序列的收敛速度

**数列的 $r$ 阶收敛(概念)：**

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$，若存在 a>0，r>0 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^r}=a$$

则称数列$\{x_n\}$ $r$ 阶收敛.

特别： (1) 收敛阶$r=1$时,称为**线性收敛**

(2) 收敛阶$r>1$时,称为**超收敛**;

(3) 收敛阶$r=2$时,称为**平方收敛**

序列的收敛**阶数越高**, 收敛速度**越快**

# 迭代序列的收敛速度

举例2：方程 $x^3+10x-20=0$,取 $x_0 = 1.5$, 证明迭代法在[1, 2]上 $x_{n+1} = 20/(x_n^2+10)$，是线性收敛

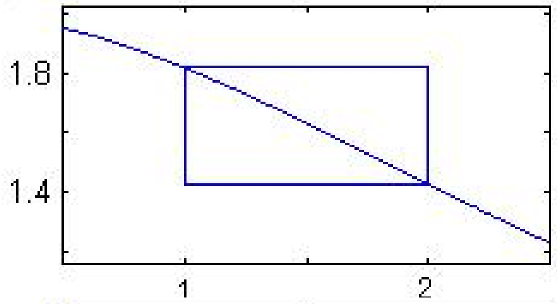
证:令 $\varphi(x) = 20/(x^2+10)$

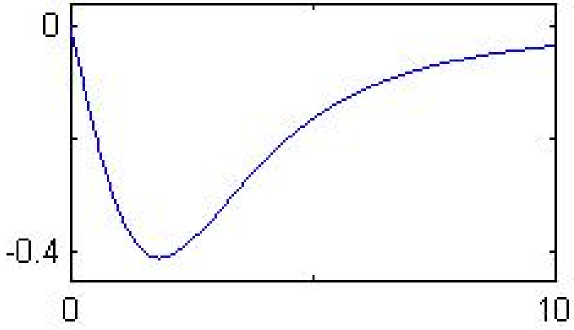
$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\varphi(1) \approx 1.82 \quad \varphi(2) \approx 1.43 \\ \varphi'(x) = -40x/(x^2+10)^2\end{array}}$$

$$\rightarrow \begin{cases}\varphi'(x) = -40x/(x^2+10)^2 \\ \varphi''(x) = 40\dfrac{3x^2-10}{(x^2+10)^3}\end{cases}$$

$$\varphi''(x) = 0 \rightarrow \hat{x} = \sqrt{10/3}$$

$$\varphi'(\hat{x}) \approx -0.4108 \rightarrow |\varphi'(x)| \le 0.411$$



# 迭代序列的收敛速度

显然,在$x^*$附近 $|\varphi'(x)|<1 \quad \varphi'(x)\neq 0$

利用Lagrange中值定理, 有

$$|x_{n+1}-x^*|=|\varphi(x_n)-\varphi(x^*)|=|\varphi'(\xi_n)||x_n-x^*|$$

其中, $\xi_n$ 介于$x_n$和$x^*$之间. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|}=\lim_{n\to\infty}|\varphi'(\xi_n)|=|\varphi'(x^*)|$$

由此可知,这一序列的收敛阶数为1,即迭代法是线性收敛.

# 迭代序列的收敛速度

| $n$ | $x_n$ | $\lvert x_{n+1}-x_n \rvert$ | $\dfrac{\lvert x_{n+2}-x_{n+1} \rvert}{\lvert x_{n+1}-x_n \rvert}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1.5000000 | 1.3265e-001 | 4.0381e-001 |
| 1 | 1.6326530 | 5.3567e-002 | 4.0594e-001 |
| 2 | 1.5790858 | 2.1745e-002 | 4.0521e-001 |
| 3 | 1.6008308 | 8.8113e-003 | 4.0553e-001 |
| 4 | 1.5920195 | 3.5732e-003 | 4.0540e-001 |
| 5 | 1.5955927 | 1.4486e-003 | 4.0545e-001 |
| 6 | 1.5941442 | 5.8733e-004 | 4.0543e-001 |
| 7 | 1.5947315 | 2.3812e-004 | 4.0544e-001 |
| 8 | 1.5944934 | 9.6545e-005 | 4.0544e-001 |
| 9 | 1.5945899 | 3.9143e-005 | 4.0544e-001 |
| 10 | 1.5945508 | 1.5870e-005 | 4.0544e-001 |
| 11 | 1.5945666 | 6.4343e-006 | |
| 12 | 1.5945602 | | |

# 序列收敛的加速方法

**定理2.6** 设$x^*$是$\varphi(x)$的不动点,且

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$$

而 $\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$ 则 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ p阶收敛

由Taylor公式

$$|x_{n+1}-x^*|=|\varphi(x_n)-\varphi(x^*)|=\frac{|x_n-x^*|^p}{p!}|\varphi^{(p)}(\xi_n)|$$

其中, $\xi_n$ 介于$x_n$和$x^*$之间. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^p}=\frac{1}{p!}\lim_{n\to\infty}|\varphi^{(p)}(\xi_n)|=\frac{1}{p!}|\varphi^{(p)}(x^*)|$$

故迭代法p阶收敛.

## 理一下思路

计算基本常识：误差、有效数字、计算中数的规则

算法的稳定概念：引迭代格式重要性

迭代法的引入：二分法（区间迭代、误差定理）

迭代法深入：不动点迭代（初值点迭代、收敛性条件、收敛误差、收敛速度，定理2.4）

经典迭代法：牛顿迭代（推导、几何、优缺点.....）

这章迭代法的对象（干什么）？

# 学到了什么?

不动点迭代法

不动点迭代的收敛性

迭代序列的收敛速度