《数值分析》20

主要内容：

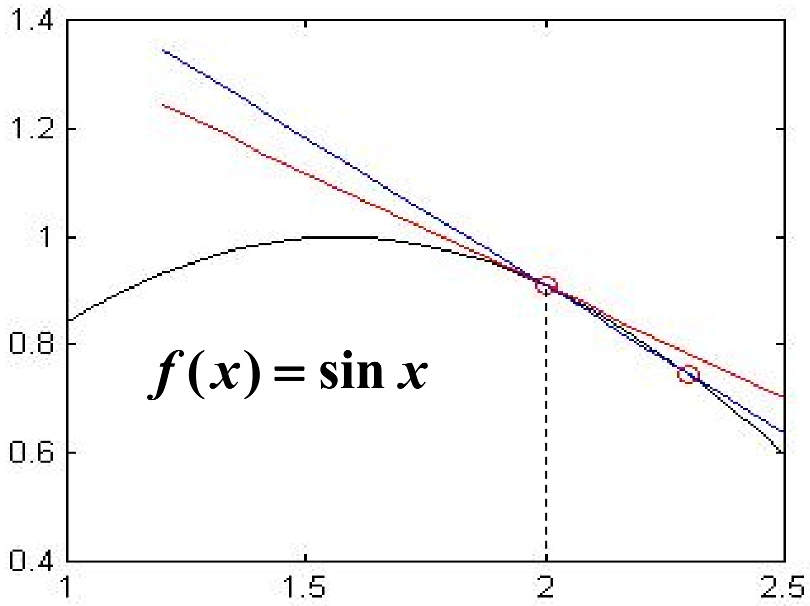
- 导数的数值计算方法
- 数值求导的外推方法
- 解微分方程的差分法简介(含常微分方程数值解法)

Taylor级数展开

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(a)+O(h^4)$$

一阶向前差商 $$f'(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+O(h)$$

h	误差
0.5	-0.2055
0.4	-0.1684
0.3	-0.1292
0.2	-0.0879
0.1	-0.0447



$a=2$

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(a)+\cdots$$

$$f(a-h)=f(a)-hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)-\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(a)+\cdots$$

$$f(a+h)-f(a-h)=2hf'(a)+O(h^3)$$

一阶中心差商 $$f'(a)=\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}+O(h^2)$$

$$f(a+h)+f(a-h)=2f(a)+h^2f''(a)+O(h^4)$$

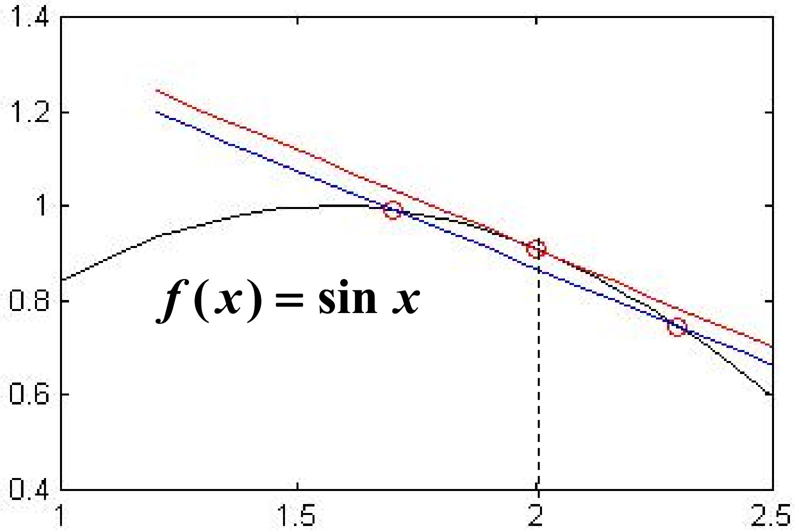
二阶中心差商 $$f''(a)=\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}+O(h^2)$$

三种一阶差商与导数误差比较

h	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
误差1	-0.2055	-0.1684	-0.1292	-0.0879	-0.0447
误差2	0.2398	0.1905	0.1416	0.0934	0.0461
误差	0.0171	0.0110	0.0062	0.0028	0.00073

二阶差商与二阶导数误差

h	误差
0.5	0.0188
0.4	0.0121
0.3	0.0068
0.2	0.0030
0.1	0.0008



$a = 2$

Lagrange插值函数方法

二次多项式插值

$$f(x)\approx\sum_{j=0}^{2}l_j(x)f(x_j)$$

$$f'(x)\approx\sum_{j=0}^{2}l_j'(x)f(x_j)\qquad f'(x_k)\approx\sum_{j=0}^{2}l_j'(x_k)f(x_j)$$

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\qquad l_0'(x)=\frac{(x-x_1)+(x-x_2)}{2h^2}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\qquad l_1'(x)=\frac{(x-x_0)+(x-x_2)}{-h^2}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\qquad l_2'(x)=\frac{(x-x_0)+(x-x_1)}{2h^2}$$

$$l_0'(x_0) = -\frac{3}{2h} \qquad l_1'(x_0) = \frac{2}{h} \qquad l_2'(x_0) = -\frac{1}{2h}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)]$$

$$l_0'(x_1) = -\frac{1}{2h} \qquad l_1'(x_1) = 0 \qquad l_2'(x_1) = \frac{1}{2h}$$

$$f'(x_1) \approx \frac{1}{2h}[-f(x_0) + f(x_2)]$$

$$l_0'(x_2) = \frac{1}{2h} \qquad l_1'(x_0) = \frac{-2}{h} \qquad l_2'(x_0) = \frac{3}{2h}$$

$$f'(x_2) \approx \frac{1}{2h}[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)]$$

二次多项式插值导出的二阶导数计算公式

$$f''(x_j) \approx \frac{f(x_{j-1}) - 2f(x_j) + f(x_{j+1})}{h^2}$$

四次多项式插值导出的二阶导数计算公式

$$f''(x_j) \approx \frac{1}{h^2}[-f_{j-2} + 16f_{j-1} - 30f_j + 16f_{j+1} - f_{j+2}]$$

外推算法

一阶导数数值计算

$$g(h)=\frac{1}{2h}[f(x+h)-f(x-h)]$$

$$g_1(h)=\frac{4g(h/2)-g(h)}{3} \qquad g_2(h)=\frac{16g_1(h/2)-g_1(h)}{15}$$

二阶导数数值计算

$$G(h)=\frac{1}{h^2}[f(x+h)-2f(x)+f(x-h)]$$

$$G_1(h)=\frac{4G(h/2)-G(h)}{3} \qquad G_2(h)=\frac{16G_1(h/2)-G_1(h)}{15}$$

数值实验 $f(x)=\sin x$ $x=2$

$$g(h)=\frac{1}{2h}[f(x+h)-f(x-h)] \qquad f'(x)=-0.2272$$

h	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
一阶中心差商	-0.2179	-0.2212	-0.2238	-0.2257	-0.2268
一次外推		-0.2223	-0.2247	-0.2263	-0.2272
二次外推			-0.2248	-0.2264	-0.2273

$$G(h)=\frac{1}{h^2}[f(x+h)-2f(x)+f(x-h)] \qquad f''(x)=-0.9738$$

h	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
二阶中心差商	-0.9537	-0.9609	-0.9666	-0.9706	-0.9730
一次外推		-0.9633	-0.9684	-0.9720	-0.9738
二次外推			-0.9688	-0.9722	-0.9740

二阶常微分方程边值问题一般形式

$$-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+r\frac{du}{dx}+qu=f(x),\qquad a\le x\le b$$

$$u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta$$

将边值问题离散化为代数方程分三个步骤：

第一步:将求解区域离散化；
第二步:将微分方程离散化；
第三步:处理边界条件.

微分方程离散化方法——有限差分法

（finite difference method）

用差商替代微分方程中的导数项

解微分方程的差分法简介

有限差分法的基本问题是研究对微分算子的各阶逼近格式（即差分格式）。

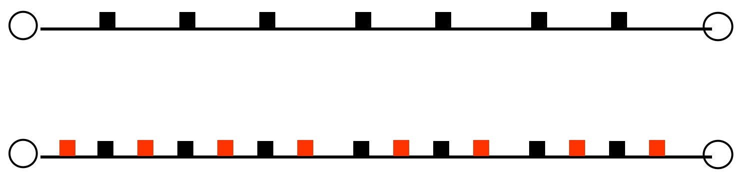
第一步:求解区域离散化，均匀剖分构造均匀网格，取正整数n，步长$h = (b - a)/(n+1)$，得

$$x_j = a + jh \quad （j = 0，1，\cdots，n+1）$$

求解区域

$$\Omega = \{x \mid a < x < b\}$$

$$\rightarrow \quad \Omega_h = \{x_j \mid x_j = a + jh, j = 1, \cdots, n\}$$



第二步:微分方程离散化

考虑微分方程 $\begin{cases} -u'' + qu = f(x), \ a \le x \le b \\ u(a) = \alpha, \ u(b) = \beta \end{cases}$

差分逼近

$$u''(x_j) = \frac{1}{h^2}[u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})] + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_j)$$

$$\rightarrow \quad -\frac{1}{h^2}(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + qu_j = f_j$$

三点差分格式 $-u_{j-1} + (2 + qh^2)u_j - u_{j+1} = h^2 f_j$

$$(\ j = 1, \cdots\cdots, n \ )$$

第三步：边界条件处理

第一类边界条件 $u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta$

$$u_0=\alpha,\ u_{n+1}=\beta$$

$$\begin{bmatrix} 2+qh^2 & -1 & & \\ -1 & 2+qh^2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2+qh^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

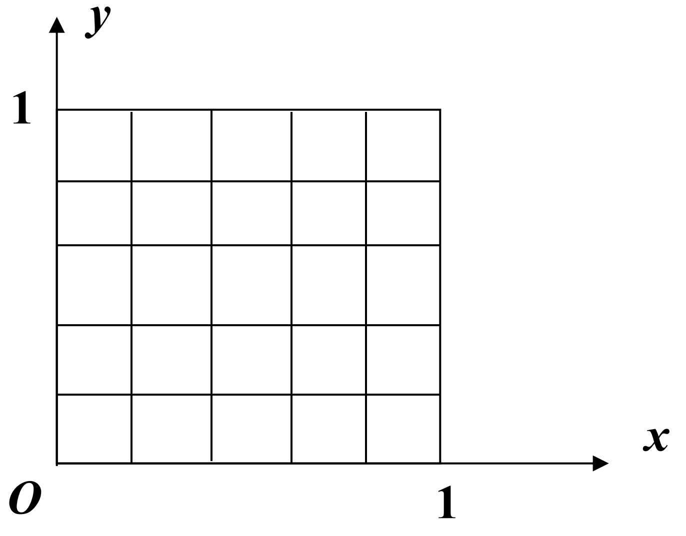
$$F_1=h^2 f_1+u_0$$

$$F_j=h^2 f_j \qquad (\,j=1,2,\cdots,n\,)$$

$$F_n=h^2 f_n+u_{n+1}$$

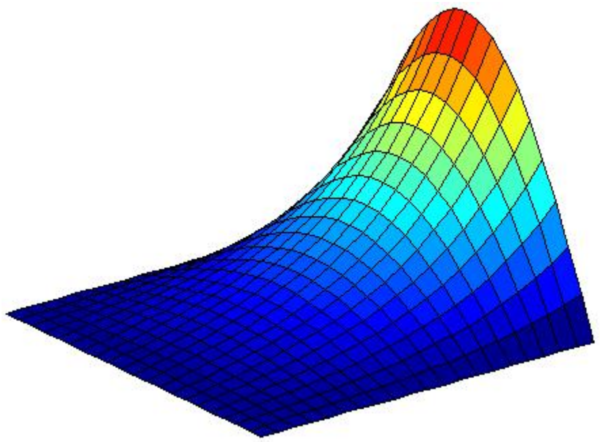
拉普拉斯方程边值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x, y < 1 \\ u(0, y) = u(x,0) = u(x,1) = 0 \\ u(1, y) = \sin \pi y \end{cases}$$



取 $h = 1/n$

$$x_i = i\,h, \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$
$$y_j = j\,h, \quad (j = 0, 1, \ldots, n)$$



$$[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}]_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i\,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)$$

$$[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}]_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i\,j} + u_{i,j-1}}{h^2} + O(h^2)$$

$$U_{ij}=\frac{1}{4}(U_{i-1,j}+U_{i+1,j}+U_{i,j-1}+U_{i,j+1})\quad (i,j=1,\ \ldots,\ n\text{-}1)$$

$$u_{ij}=\frac{1}{4}(u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j-1}+u_{i,j+1})\quad (i,j=1,\ldots,2n\text{-}1)$$

外推: $$\widetilde{U}_{ij}=(4u_{2i,2j}-U_{ij})/3$$

高斯-赛德尔迭代法结合外推技术实验

n	10	20	外推
error	0.0028	7.1115e-004	6.5304e-006
iteratives	152	706	

思考题与练习题

Ex1.设$f(x)\in C^2[a，b]$, 带余项梯形公式可以表示为

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)\omega_2(x)dx$$

其中 $\omega_2(x) = (x-a)(x-b)$

Ex2.试推导数值微分公式

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)]$$

的截断误差。

学到了什么?

导数的数值计算方法

数值求导的外推方法

解微分方程的差分法简介(含常微分方程数值解法)