《数值分析》2

主要内容：

- 数值计算中的基本原则
- 算法的数值稳定概念
- 方程求根问题引例
- 二分法及其算法描述

数值计算中的基本原则

(1)避免绝对值小的数做除数;

(2)避免两相近数相减;

(3)防止大数“吃”小数现象

EXP: $a = 10^9$，$b = 9$，在8位浮点数系统中做加法

$$a + b = 1.0000000 \times 10^9 + 0.000000009 \times 10^9$$

由于只保留8位有效数，处于第九、十位的数09被舍去，

实际操作是：将 a 的数据作为加法计算的最终结果.

(4)尽量减少计算工作量(乘、除法次数)

举例: 计算 $P(x) = 1+2x+3x^2+4x^3 + 5x^4$ 的值

秦九韶算法

$$P(x)=1+x(2+x(3+x(4+5x)))$$

应用: 2进制数转换为10进制数算法

$(1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0)_2 = 2^7+2^6+2^5+0+2^3+2^2+2+0$

$=((((((1\cdot 2+1)2+1)2+0)2+1)2+1)2+1)2+0$

$=238$

算法数值稳定引例

举例1： 计算 $I_n = e^{-1}\int_0^1 x^n e^x dx$ （n =0,1,⋯, 20）

$$\int_0^1 x^n dx \le \int_0^1 x^n e^x dx \le e\int_0^1 x^n dx$$

$$\frac{e^{-1}}{n+1} \le I_n \le \frac{1}{n+1}$$

$$I_0 = e^{-1}\int_0^1 e^x dx = e^{-1}(e-1) = 1 - e^{-1}$$

$$I_n = e^{-1}\int_0^1 x^n e^x dx$$

$$= e^{-1}\left(x^n e^x\Big|_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^x dx\right) = 1 - nI_{n-1}$$

算法的数值稳定概念

理论递推公式: $I_n = 1 - nI_{n-1} \quad (I_0 = 1 - e^{-1})$

初值: $I_0 = 1 - e^{-1} \approx 0.63212055882856$

实际计算: $S_n = 1 - nS_{n-1}$, $S_0 = 0.63212055882856$

```
S_1 =1-0.63212055882856; S(2)=1- S_1;
for  n=2:20
   S(n)=1-n*S(n-1)
end
```

n=20时，$S_{20} = -30.19239488558378$

算法的数值稳定概念

$$S_n=1-nS_{n-1} \quad \text{v.s.} \quad I_n=1-nI_{n-1}$$

$$S_n-I_n=-n(S_{n-1}-I_{n-1})$$

$$e(S_n)=-ne(S_{n-1})=\cdots\cdots=(n!)(-1)^n e(S_0)$$

- 初值误差在算法执行过程中不断增大，这种算法称为数值不稳定算法。

新算法：$I_{n-1}=(1-I_n)/n$

```
S(30)=1/31
for  n=30:-1:2
    S(n-1)=(1-S(n))/n;
end
S0=1-S(1),S(1:21)
```

请仿照上例分析

$S_{n-1}-I_{n-1}=-(S_n-I_n)/n$,

$(n=30, 29, \cdots, 1)$

迭代最终结果为：S_1

算法的数值稳定概念

$$|e(S_1)| = |S_1 - I_1| = |(S_2 - I_2)|/2 = \cdots\cdots = \boxed{|S_{30} - I_{30}|}/\,30!$$

初始误差

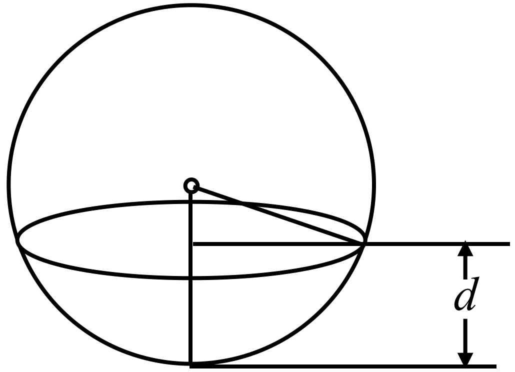
◆初始误差在算法执行过程中不断减小，这种算法称为数值稳定算法。

可知：数学上完全等价的两种递推公式，由于运算次序不同会出现完全不同的算法稳定情况。

非线性方程求根引例

举例2：水中浮球问题

有一半径R =10 cm的球体,密度ρ =0.638.球体浸入水中后,浸入水中的深度d 是多少？



$$V=\int_0^d \pi[R^2-(R-x)^2]dx=\frac{1}{3}\pi d^2(3R-d)$$

阿基米德定律➔ $$\frac{4}{3}\pi R^3\rho=\frac{1}{3}\pi d^2(3R-d)\boxed{\times 1}$$

水密度

➔ $$4R^3\rho=d^2(3R-d)$$

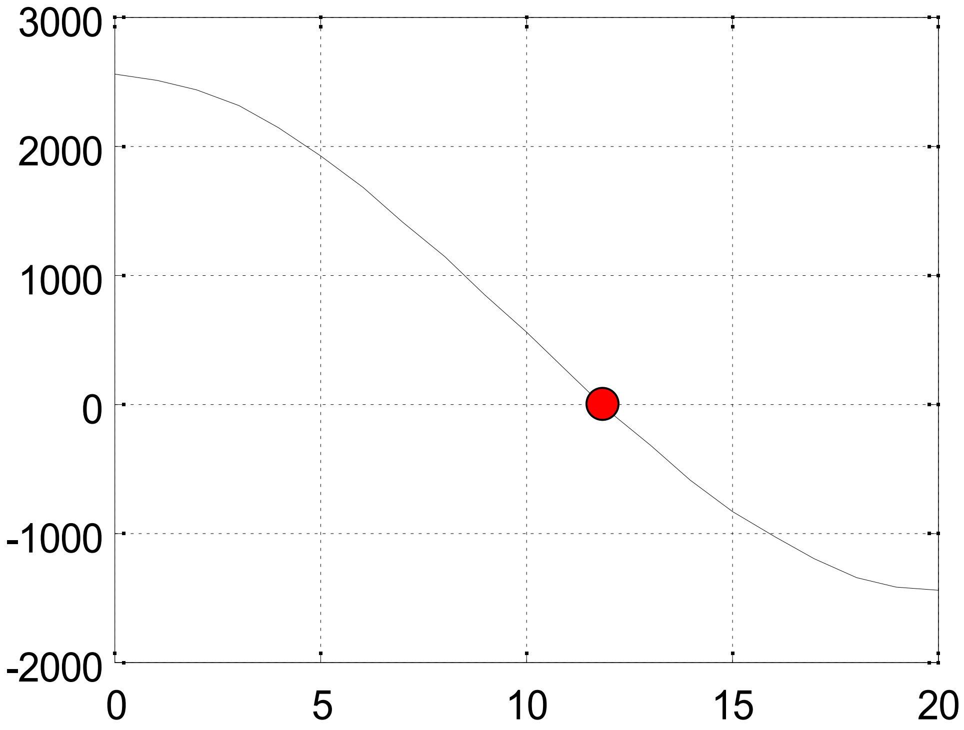
➔ $$d^3-3Rd^2+4R^3\rho=0$$

由ρ =0.638, R = 10, 代入, 得:

$$d^3 - 30d^2 + 2552 = 0$$

令 $f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552$,函数图形如下

$f(x)$在区间[0,20]有**唯一**的根




```
P= [1 -30 0 2552];
roots(P)   --->Matlab命令
ans =
      26.3146
      11.8615
      -8.1761
```

方程求根问题引例

用数值方法求非线性方程的根，分两步进行：

① **对根进行隔离：** a) 找出隔根区间 (内部只有一个解); 或 b) 在隔根区间内确定一个解的近似值x_0.

② **逐步逼近：** 利用近似解x_0 (或隔根区间), 通过迭代算法得到更精确的近似解.

设$f(x) = 0$的根为 x^*, 通过迭代计算, 产生序列:

$$x_0 \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n \cdots\cdots\cdots$$

只须： $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$

如何构造迭代格式

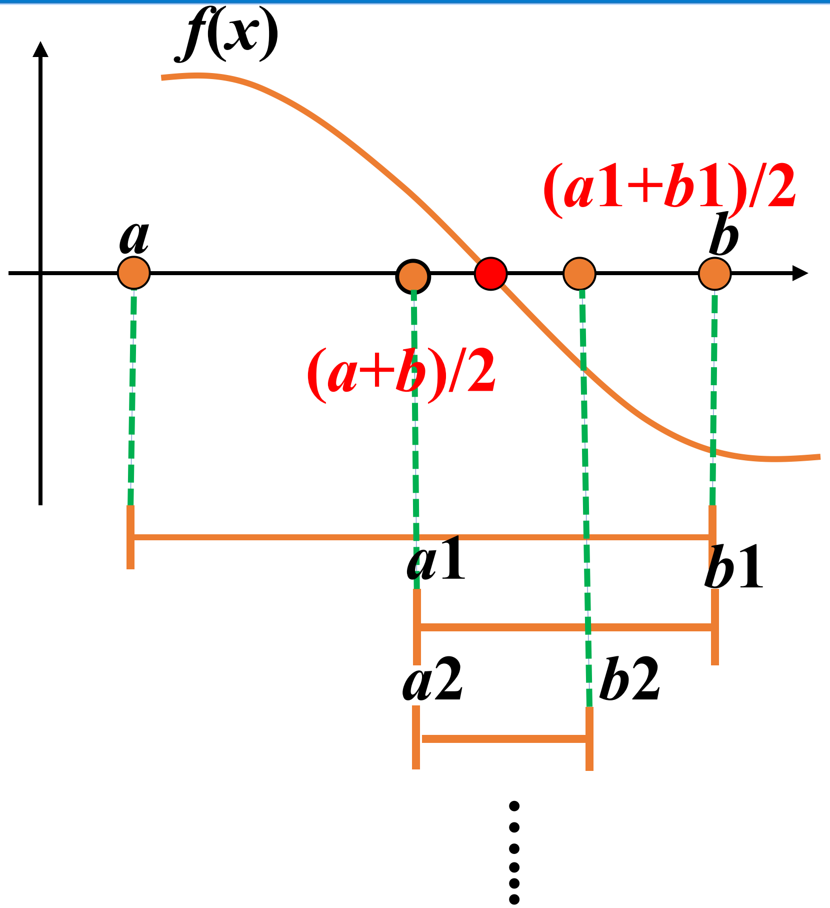
二分(迭代)法引例

已知方程 $f(x)=0$ 有一隔根区间$[a, b]$, 且$f(x)$满足$f(a)\cdot f(b)<0$, 则:

①先将$[a , b]$等分为两个相等小区间

②判断根属于哪个小区间

③舍去无根区间保留有根区间$[a_1, b_1]$;



总结: 把区间$[a_1, b_1]$ 一分为二, 进一步判断根属于哪个更小的区间$[a_2, b_2]$, 如此不断二分以缩小区间长度

二分法及其算法描述

构造二分法迭代格式

已知$f(x)=0$在$[a,b]$内有一根, 且$f(a).f(b)<0$

1) 计算: $y_a \leftarrow f(a)$, $x_0 \leftarrow 0.5(a+b)$, $y_0 \leftarrow f(x_0)$

判断: 若$y_0=0$, 则x_0是根, 否则转下一步;

2) 判断: 若$y_0 \cdot y_a<0$, 则$a_1 \leftarrow a$, $b_1 \leftarrow x_0$

否则 $a_1 \leftarrow x_0$, $b_1 \leftarrow b$, $y_a \leftarrow y_0$

3) Repeat! 直至达到精度要求

算法流程

$[a, b]$ $\xrightarrow{x_0=0.5(a+b)}$ $[a_1,b_1]=[a,x_0]$ 或 $[a_1,b_1]=[x_0,b]$ $\xrightarrow{x_1=0.5(a_1+b_1)}$

$y_0=f(x_0)=0$?

$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots$

二分法及其算法描述

二分法迭代将得到一系列隔根区间:

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

性质: 1. $f(a_n)\cdot f(b_n)<0$;　2. $b_n - a_n = (b-a)/2^n$

定理2.2: 设x^*是$f(x)=0$在$[a, b]$内的唯一根,且$f(a)\cdot f(b)<0$,, 则二分计算过程中, 各区间的中点数列

$$x_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n)(n=0,1,2,\cdots)$$

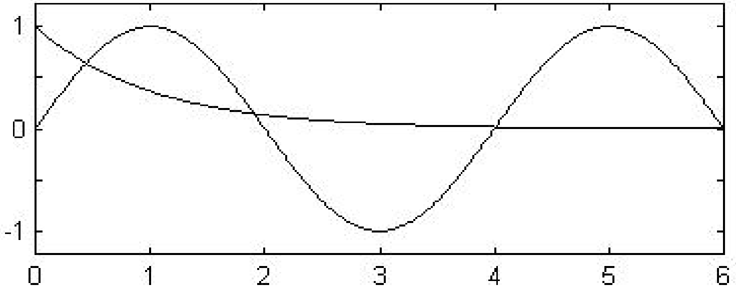
满足: $|x_n - x^*| \le (b-a)/2^{n+1}$

注记: 若要 $|x_n - x^*| \le \frac{1}{2}\times 10^{-3}$

只需 $\frac{b-a}{2^{n+1}} \le \frac{1}{2}\times 10^{-3}$ ➔ $n \ge \log_2 \frac{b-a}{10^{-3}}$

举例3： 二分法求方程 $\exp(-x)-\sin(\frac{\pi x}{2})=0$

在区间 [0, 1]内的根；二分十次。



解: 令 $f(x)=\exp(-x)-\sin(\frac{\pi x}{2})$

Step 1： 判断
f(0)f(1)<0 ?

$$f(0)=1>0 \quad f(1)=e^{-1}-1<0 \ \Rightarrow f(0)f(1)<0$$

Step 2： 判断在[0,1]是否有唯一根?

$$f'(x)=-[\exp(-x)+\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi x}{2})]<0,\ \ 0<x<1$$

函数在[0,1]内有唯一零点, 故[0,1]是隔根区间

二分法迭代实验数据

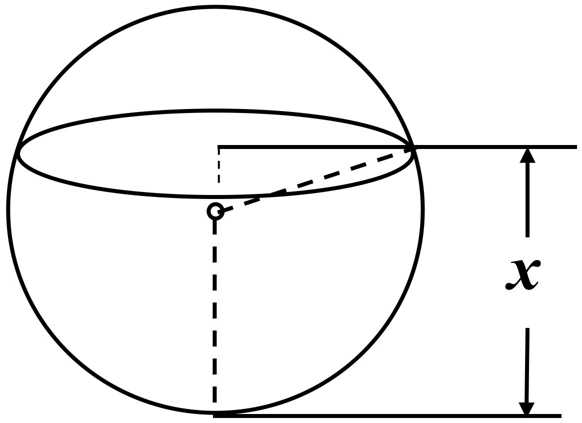
n	*an*	*xn*	*bn*
0	0	5.0000e-001	1.0000e+000
1	0	2.5000e-001	5.0000e-001
2	2.5000e-001	3.7500e-001	5.0000e-001
3	3.7500e-001	4.3750e-001	5.0000e-001
4	4.3750e-001	4.6875e-001	5.0000e-001
5	4.3750e-001	4.5313e-001	4.6875e-001
6	4.3750e-001	4.4531e-001	4.5313e-001
7	4.3750e-001	4.4141e-001	4.4531e-001
8	4.4141e-001	4.4336e-001	4.4531e-001
9	4.4336e-001	4.4434e-001	4.4531e-001
10	4.4336e-001	4.4385e-001	4.4434e-001

$$|x_{10} - x^*| \le 1/2^{11} \le 1/2000$$

举例4：二分法算法(水中浮球问题)

$$f(d) = d^3 - 30\,d^2 + 2552 = 0\ ,\ [0, 2R]=[0, 20]$$

```
f=inline('x.^3-30*x.^2+2552');
a=0; b=20; er=b-a; ya=f(a);
k=0; er0=.005;
while er>er0
   x0=(a+b)/2; y0=f(x0);
   if ya*y0<0
      b=x0;
   else
      a=x0; ya=y0;
   end
   er=b-a;k=k+1;
end
k, xk=(a+b)/2
```



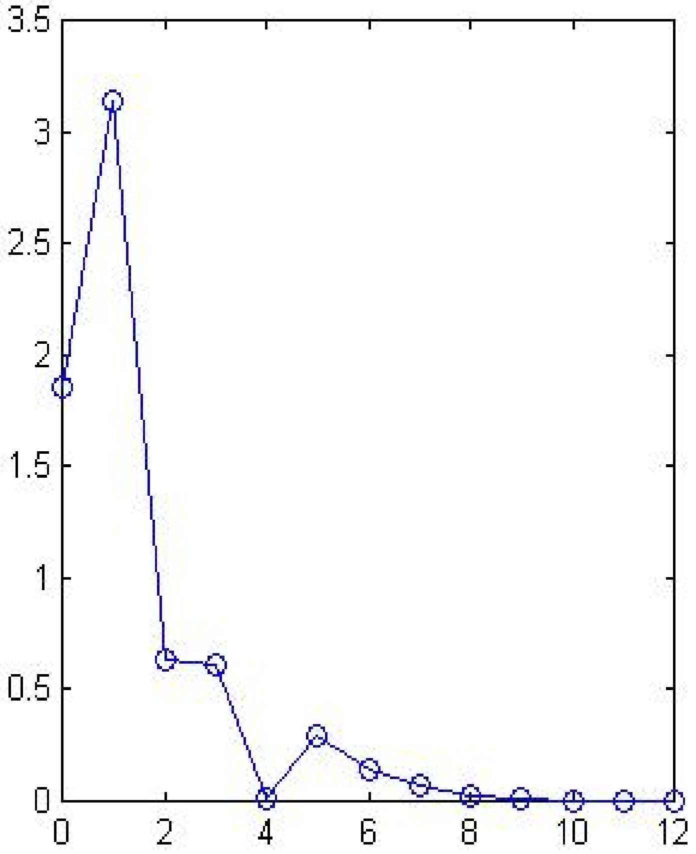
k=12, x_k=11.8628

满足:

$$|x_n - x^*| \le 20/\,2^{13} \le 0.0025$$

二分法迭代实验数据（ $x^*=11.8615$ ）

n	$\lvert xk - x^* \rvert$
0	1.8615e+000
1	3.1385e+000
2	6.3850e-001
3	6.1150e-001
4	1.3498e-002
5	2.9900e-001
6	1.4275e-001
7	6.4627e-002
8	2.5564e-002
9	6.0328e-003
10	3.7329e-003
11	1.1499e-003
12	1.2915e-003



练习与思考

1.设计多项式算法

$$P_1(x)=1+2x^3+3x^7+4x^{11}+5x^{15}\quad (7次乘法)$$

2. 微积分回顾

连续函数介值定理、拉格朗日中值定理

3. 两次二分中点之差$|x_{n+1}-x_n|=?$

4.半径R =10 cm的圆柱体,密度ρ =0.5. 平放浸入水中,要计算吃水深度d , 考虑数学模型。

学到了什么?

- 数值计算中的基本原则
- 算法的数值稳定概念
- 方程求根问题引例
- 二分法及其算法描述