《数值分析》19

主要内容：

- Simpson公式的精度和复合型
- 圆周长计算外推方法（引例）
- 复合梯形公式外推方法
- Gauss型数值积分公式

Simpson公式的精度和复合型

Simpsion公式 $S[f]=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$

例1: 证明辛卜生公式代数精度为3?

证明：分别令f(x) = 1， f(x) = x .....验证

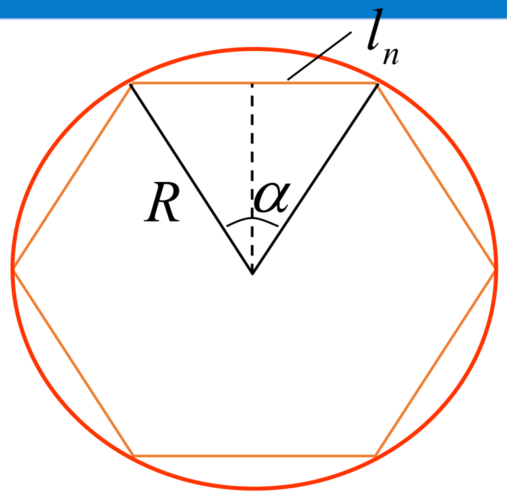
复合Simpson公式 (类似复合梯形公式，自推)

圆周长计算外推方法（引例）

引例 圆周长计算的“外推算法”

半径R=0.5的圆内接正多边形周长。边长为l_n，对应三角形顶角为

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} l_n = 0.5 \sin\frac{\pi}{n}$$



$$L_n = n \sin\frac{\pi}{n}$$

利用正弦函数泰勒展开

$$L_n = n \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\pi^{2j+1}}{(2j+1)!} \frac{1}{n^{2j+1}}$$

$$= \pi + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \frac{\pi^{2j+1}}{(2j+1)!} \left(\frac{1}{n}\right)^{2j} + O\left(\frac{1}{n^{2k+2}}\right)$$

记 $h = \dfrac{1}{n}; \alpha_j = (-1)^j \dfrac{\pi^{2j+1}}{(2j+1)!}$

圆周长计算外推方法（引例）

则有：

$$T(h)=\pi+\alpha_1 h^2+\alpha_2 h^4+\alpha_3 h^6+\cdots+\alpha_k h^{2k}+O(h^{2k+2})$$

说明T(h)的截断误差为 $O(h^2)$!

令：$$T(\frac{h}{2})=\pi+\alpha_1(\frac{h}{2})^2+\alpha_2(\frac{h}{2})^4+\alpha_3(\frac{h}{2})^6+\cdots+\alpha_k(\frac{h}{2})^{2k}+O(h^{2k+2})$$

将两式联合消去h^2 ,得如下

$$T_1(h)=\frac{4T(\frac{h}{2})-T(h)}{4-1}$$

即：$$T_1(h)=\pi+\beta_2 h^4+\beta_3 h^6+\cdots+\beta_k h^{2k}+O(h^{2k+2})$$

上述过程完成了一次外推，截断误差为 $O(h^4)$!

=> 得到截断误差更小的外推公式$T_1(h)$

同理，可完成第二次外推：

有(1): $$T_1(h)=\pi+\beta_2h^4+\beta_3h^6+\cdots+\beta_kh^{2k}+O(h^{2k+2})$$

且(2): $$T_1(\frac{h}{2})=\pi+\beta_2(\frac{h}{2})^4+\beta_3(\frac{h}{2})^6+\cdots+\beta_k(\frac{h}{2})^{2k}+O(h^{2k+2})$$

将两式联合消去h^4 ,得如下

$$T_2(h)=\frac{4^2T_1(\frac{h}{2})-T_1(h)}{4^2-1}$$

即： $T_2(h)=\pi+\gamma_3h^6+\cdots+\gamma_kh^{2k}+O(h^{2k+2})$

此时截断误差为 $O(h^6)$!

同理，反复进行下去得到收敛速度越来越快的公式！

圆周长计算外推方法（引例）

实验数据

边数	周长误差	一次外推误差	二次外推误差
3	5.4352e-001		
6	1.4159e-001	7.6181e-003	
12	3.5764e-002	4.8793e-004	1.2590e-005
24	8.9640e-003	3.0683e-005	1.9969e-007
48	2.2425e-003	1.9206e-006	3.1319e-009
96	5.6070e-004	1.2008e-007	4.8982e-011
192	1.4018e-004	7.5060e-009	7.6517e-013

外推小总结

- **数学工具：**基于泰勒展开
- **目的：**为了让截断误差越来越小
- **原理：**将h不断变为h/2, 得到两个公式，共同消去截断误差
- **消去截断误差注意：**从阶数小开始消去，反复实施，最终达到截断误差越来越高阶（收敛速度越来越快）
- **问：可以先从高阶误差开始消去么?**
- **不行!**

复合梯形公式外推方法

记 $I=\int_a^b f(x)dx$ $\quad T(h)=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(a+jh)]$

复合梯形公式

则 $I-T(h)=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\eta)$

$$T(h)=I+\frac{(b-a)}{12}f''(\eta)h^2$$

$$T(h)=I+O(h^2)$$

欧拉-马克劳林公式

$$T(h)=I+\alpha_1h^2+\alpha_2h^4+\alpha_3h^6+\cdots+\alpha_kh^{2k}+O(h^{2k+2})$$

$$T(\frac{h}{2})=I+\alpha_1(\frac{h}{2})^2+\alpha_2(\frac{h}{2})^4+\cdots+\alpha_k(\frac{h}{2})^{2k}+O(h^{2k+2})$$

$$4T(\frac{h}{2})-T(h)=3I+\alpha_2[\frac{1}{4}-1]h^4+\cdots$$

所以 $[4T(\frac{h}{2})-T(h)]/3=I+O(h^4)$

记 $T_1(h)=\dfrac{4T(\frac{h}{2})-T(h)}{4-1}$

$$T_1(h)=I+\beta_2h^4+\beta_3h^6+\cdots+\beta_kh^{2k}+O(h^{2k+2})$$

$$T_1(\frac{h}{2})=I+\beta_2(\frac{h}{2})^4+\beta_3(\frac{h}{2})^6+\cdots+\beta_k(\frac{h}{2})^{2k}+O(h^{2k+2})$$

记 $T_2(h)=\dfrac{4^2T_1(\frac{h}{2})-T_1(h)}{4^2-1}$ 有:$T_2(h) = I + O(h^6)$

复合梯形公式外推方法

以此类推到m次类推，如果记$T_0(h)=T(h)$

$$\boxed{T_m(h)=\frac{4^m T_{m-1}(\frac{h}{2})-T_{m-1}(h)}{4^m-1},(m=1,2,\cdots)}$$

且： $T_m(h)=I+O(h^{2m+2})$

$T_0(h)$的展开课逐次构造出I的更高阶的近似，这种方法称为**理查森外推原理**

考虑外推算法，用$n=2k$表示区间[a，b]的等分数，记$T_0^{(k)}(k=0, 1, \ldots)$表示[a，b]逐次二等分后的梯形公式值：

记 $$T_0^{(0)}=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$T_0^{(k)}=\frac{b-a}{2^{k+1}}[f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{2^k-1}f(a+j(b-a)/2^k)]$$

➢ 龙贝格积分公式

$h=(b-a)/2^0$ $\downarrow T_0^{(0)}$

$h=(b-a)/2^1$ $\downarrow T_0^{(1)} \to T_1^{(1)}$

$h=(b-a)/2^2$ $\downarrow T_0^{(2)} \to T_1^{(2)} \to T_2^{(2)}$

$h=(b-a)/2^3$ $\downarrow T_0^{(3)} \to T_1^{(3)} \to T_2^{(3)} \to T_3^{(3)}$

…

$h=(b-a)/2^k$ $\downarrow T_0^{(k)} \to \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \to T_k^{(k)}$

…

$$\begin{cases} T_0^{(k)} = k\text{次复化梯形求积公式} \\ T_m^{(k)} = \dfrac{4^m T_{m-1}^{(k)} - T_{m-1}^{(k-1)}}{4^m - 1} \end{cases}$$

注意：$m = 0, 1, \dots$
$h = (b-a)/2^k$

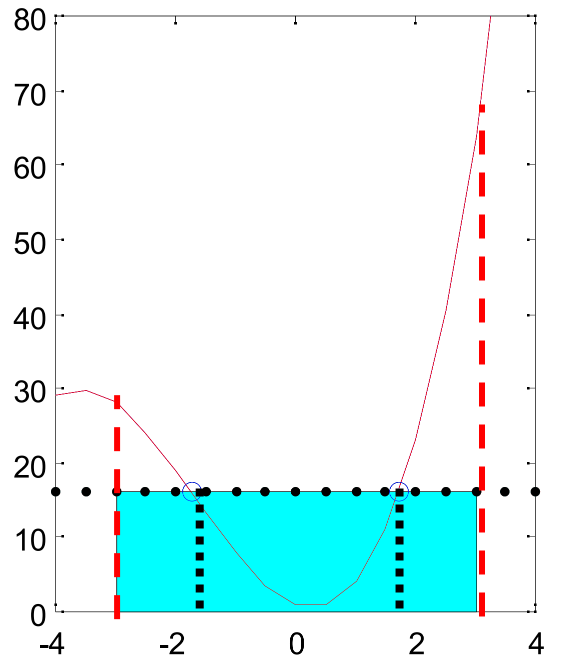
计算： 1） 次序由上而下(半分区间)，由左而右(外推公式)；

2） 先求出$T_0^{(k)}(k=0, 1, \dots)$；

3） 按上式表格算出$T_k^{(k)}$ 直到 $|T_k^{(k)} - T_{k-1}^{(k-1)}| <= e$ (精度要求)即停止计算。

高斯型数值求积公式

$$\int_{-3}^{3}(x^3+5x^2-3x+1)dx$$



插值型求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)$$

代数精度为3, 取 $f(x)=1,\ x,\ x^2,\ x^3$

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 & (1) \\ A_0x_0 + A_1x_1 = 0 & (2) \\ A_0x_0^{\,2} + A_1x_1^{\,2} = \dfrac{2}{3} & (3) \\ A_0x_0^{\,3} + A_1x_1^{\,3} = 0 & (4) \end{cases}$$

(4)-(2)$\times x_0^2$ → $x_1^2 = x_0^2$

(3)-(1) $\times x_0^2$ → $x_0^2=1/3$

→ $x_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\quad x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

A_0=1，A_1=1. 代数精度为 3 的数值求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

对于[*a*, *b*]区间上的定积分,构造变换

$$x(t) = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} \qquad t\in[-1,\ 1]$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2})dt$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(-\frac{b-a}{2\sqrt{3}} + \frac{b+a}{2}) + f(\frac{b-a}{2\sqrt{3}} + \frac{b+a}{2})]$$

定义 如果求积结点$x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n$,使插值型求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

的代数精度为$2n+1$,则称该求积公式为Gauss型求积公式. 称这些求积结点为Gauss点.

定理7.2 如果多项式$w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$与任意的不超过$n$次的多项式$P(x)$ 正交，即

$$\int_{-1}^{1} w_{n+1}(x)P(x)dx = 0$$

则, $w_{n+1}(x)$的所有零点$x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n$ 是Gauss点

证明: 设$f(x)$是任意不超过$(2n+1)$次多项式，由多项式除法

$$f(x) = w_{n+1}(x)P(x) + Q(x)$$

其中,$P(x)$,$Q(x)$ 均为不超过n次多项式. 两端积分，得

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} Q(x)dx$$

构造插值型求积公式,有 $$\int_{-1}^{1} Q(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k Q(x_k)$$

其中， $A_k = \int_{-1}^{1} l_k(x)dx$ 插值结点为$w_{n+1}(x)$的零点

由于 $Q(x_k) = w_{k+1}(x_k)P(x_k) + Q(x_k) = f(x_k)$

所以 $$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

验证多项式 $w_2(x)=x^2-\dfrac{1}{3}$ 在 [–1, 1]上与任意小于等于1次多项式正交.

$$\int_{-1}^{1}(a_0+a_1x)w_2(x)dx=a_0\int_{-1}^{1}w_2(x)dx+a_1\int_{-1}^{1}xw_2(x)dx=0$$

得Gauss点 $x_0=-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\quad x_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

插值公式: $$f(x)\approx\frac{x_1-x}{x_1-x_0}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{x_1-x}{x_1-x_0}dx=\frac{2x_1}{x_1-x_0}=1\qquad\int_{-1}^{1}\frac{x-x_0}{x_1-x_0}dx=\frac{-2x_0}{x_1-x_0}=1$$

两点Gauss公式 $$\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Legendre多项式递推式
$$\begin{cases} p_0 = 1,\ \ p_1 = x, \\ p_{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1} x p_n - \dfrac{n}{n+1} p_{n-1} \end{cases}$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = 0$$

$$x_{0,2} = \mp\sqrt{\frac{3}{5}} \approx -0.7745067$$

$$x_1 = 0$$

三点Gauss数值求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx$

$$0.5556 f(-0.7745) + 0.8889 f(0) + 0.5556 f(0.7745)$$

学到了什么？

Simpson公式的精度和复合型

圆周长计算外推方法（引例）

复合梯形公式外推方法

Gauss型数值积分公式