《数值分析》18

主要内容：

- 定积分数值计算方法
- 插值型求积公式
- 求积公式的代数精度
- 复合梯形公式

数值求积的基本思想

1. 定积分及其计算

对于积分 $I = \int_a^b f(x)dx$

只要找到被积函数f(x)的原函数F(x)，便有下列牛顿—莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

2. 为何要进行数值积分?

原因之一: f(x)的原函数难以求解或太复杂

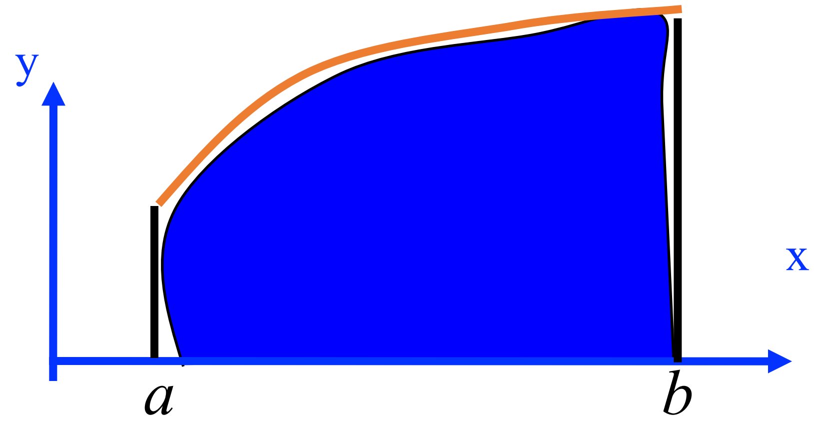
例 $\int_a^b \sin x^2 dx$, $\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx$ 等等

原因之二: f(x)以离散数据点形式给出

x_i	x_0	x_1	…	x_n
$y_i = f(x_i)$	y_0	y_1	…	y_n

3. 数值积分的基本思想

角度1: 由定积分的几何意义，只需计算曲边梯形的面积



由此可得以下公式

梯形公式:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(b)+f(a)]$$

猜想: 1)可以不用原函数？ 2）用到的点越多越好?

角度2: 由定积分的定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \lambda = \max_i \Delta x_i$$

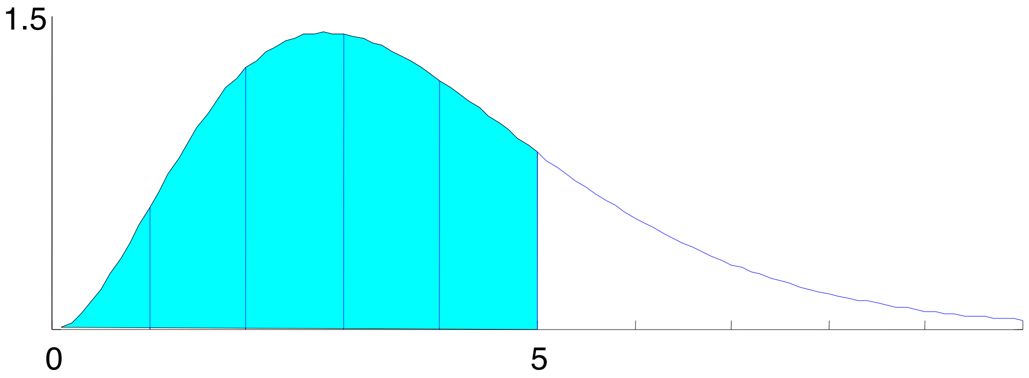
积分和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 是一些点上函数值的线性组合。

故数值积分的**基本思想:**

用被积函数在积分区间上某些节点x_k，（k=0,…,n）处的函数值的线性组合作为定积分的近似值。即

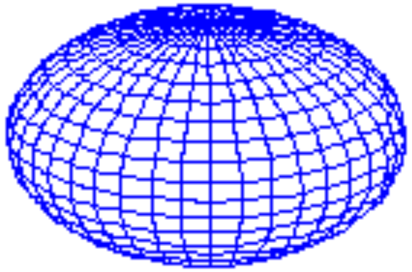
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

定积分数值计算方法



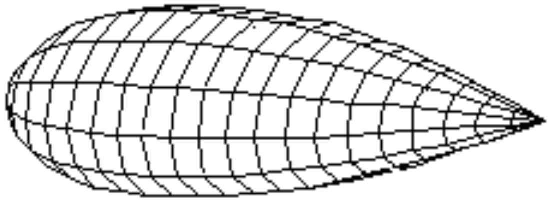
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

积分数值计算要解决的问题:



1. 定积分与线积分的计算?

2. 重积分的数值计算?

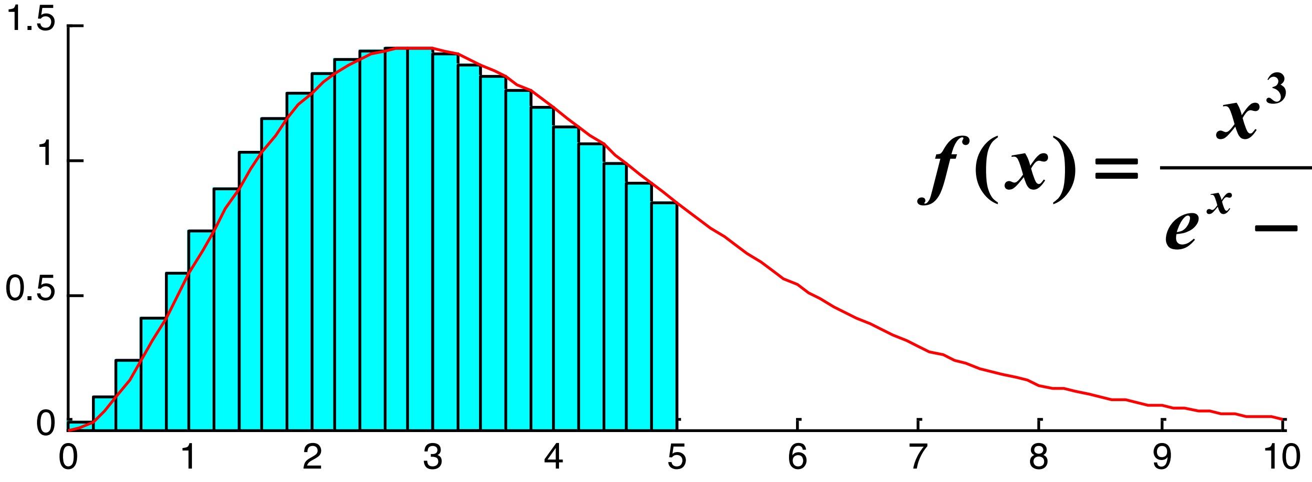


3. 由离散数据计算面积和体积?

4. 数值积分的误差和精度?

定积分与积分和式

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)h$$



$$f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$$

右矩形和 $$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)h$$

h	1	0.5	0.2	……
S_n	5.2908	5.1044	4.9835	……

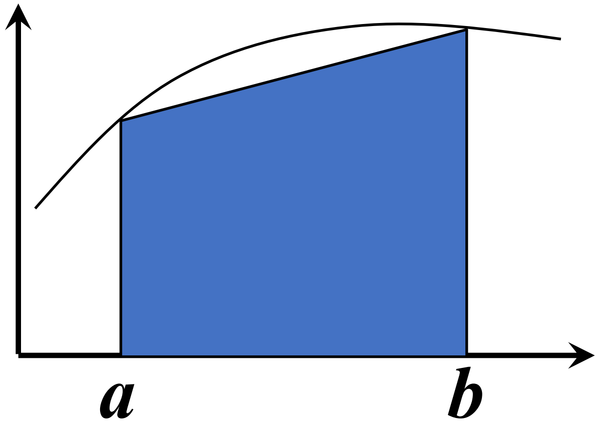
数值求积公式的一般形式

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R[f]$$

$R[f]$ —— 数值求积公式余项

$x_0, x_1, \cdots, x_n$ —— 求积结点

$A_0, A_1, \cdots, A_n$ —— 求积系数



梯形公式:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(a) + A_1 f(b)$$

$A_0 = (b-a)/2$

$A_1 = (b-a)/2$

插值型求积公式

对 $[a，b]$做分划: $a \le x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n \le b$

Lagrange插值 $$f(x) \approx \sum_{j=0}^{n} l_j(x) f(x_j)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} [\int_a^b l_j(x)dx] f(x_j)$$

令 $$A_j = \int_a^b l_j(x)dx, (j = 0,1,2,\cdots,n)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j) + R[f]$$

插值型求积公式的余项

$$R[f]=\int_a^b[f(x)-L_n(x)]dx=\int_a^b\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx$$

例2. 用线性插值公式推导梯形公式

$$A_0=\int_a^b\frac{b-x}{b-a}dx=\frac{1}{2}(b-a)\qquad A_1=\int_a^b\frac{x-a}{b-a}dx=\frac{1}{2}(b-a)$$

$$\Rightarrow\quad \int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]+R[f]$$

$$R[f]=\int_a^b\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)dx$$

例3. 二次插值方法推导数值求积公式. 取 $h=(b-a)/2$

➔ $x_0=a$, $x_k=x_0+kh \quad (k=0,1,2)$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{2} l_k(x)f(x_k)+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\begin{cases} l_0(x)=\dfrac{1}{2h^2}(x-x_1)(x-x_2) \\ l_1(x)=-\dfrac{1}{h^2}(x-x_0)(x-x_2) \\ l_2(x)=\dfrac{1}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} A_0=\int_a^b l_0(x)dx \\ A_1=\int_a^b l_1(x)dx \\ A_2=\int_a^b l_2(x)dx \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x)dx=A_0f(x_0)+A_1f(x_1)+A_2f(x_2)+R[f]$$

$$A_0 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2}dx \quad = \frac{1}{6}(b-a)$$

$$A_1 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{-h^2}dx \quad = \frac{2}{3}(b-a)$$

$$A_2 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}dx \quad = \frac{1}{6}(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]+R[f]$$

即 Simpson 公式,求积余项为

$$R[f] = \frac{1}{3!}\int_a^b f^{(3)}(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx$$

例4. 两点埃尔米特插值推导数值求积公式

解: 取 $h=b-a$ $\qquad \xi=(x-a)/h$

$$H(x)=f(a)\alpha_0(x)+f(b)\alpha_1(x)+f'(a)\beta_0(x)+f'(b)\beta_1(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b H(x)dx+R[f]$$

$$\int_a^b H(x)dx=A_0f(a)+A_1f(b)+B_0f'(a)+B_1f'(b)$$

$$A_0=\int_a^b \alpha_0(x)dx=h\int_0^1(1+2\xi)(1-\xi)^2d\xi=\frac{h}{2}$$

$$A_1=\int_a^b \alpha_1(x)dx=h\int_0^1[1+2(1-\xi)]\xi^2d\xi=\frac{h}{2}$$

$$B_0 = \int_a^b \beta_0(x)dx = h^2\int_0^1 \xi(1-\xi)^2 d\xi \quad = \frac{h}{12}$$

$$B_1 = \int_a^b \beta_1(x)dx = -h^2\int_0^1 (1-\xi)\xi^2 d\xi \quad = -\frac{h}{12}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{h^2}{12}[f'(b)-f'(a)] + R[f]$$

数值求积公式的余项

$$\boxed{R[f] = \frac{1}{4!}\int_a^b f^{(4)}(\xi)(x-a)^2(x-b)^2 dx}$$

求积公式的代数精度

定义: 对不高于*m*次的多项式*f*(*x*),求积公式余项

$$R[f]=\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)\equiv 0$$

且有*m*+1次多项式不具有这样的性质, 则称

$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$$

具有***m*阶的代数精度**

例. 梯形公式 $\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$ 代数精度为1阶

类似有: Simpson公式具有3阶代数精度

What? Why?

代数精度的概念

1. 为何引入代数精度?

数值求积方法是近似方法，为了保证精度，我们自然希望公式能对“尽可能多”的函数准确成立，这就提出了所谓代数精度的概念。

指代数多项式

2. 代数精度的定义

定义1　若某个求积公式对于**次数≤m的多项式均能够准确成立**，但对于**m+1次多项式就不一定准确**，则称该求积公式有m次代数精度。

定义2　若某个求积公式对于1，x,…，x^m 均能够准确成立，但对于x^{m+1}就不准确成立，则称该求积公式有m次代数精度。

判断方法

3. 代数精度的应用之一：判断代数精度

例5 证明：梯形公式具有一次代数精度。

证明 梯形公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(b)+f(a)]$

当 f(x)=1 时（0次），

左边= $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 1dx = b-a$

右边= $\frac{b-a}{2}[1+1] = b-a$

故 左边=右边 公式至少具有0次代数精度

当 f(x)=x 时,

左边= $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xdx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

右边= $\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

故 左边=右边

公式至少具有1次代数精度.

当 $f(x)=x^2$ 时，

左边= $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$

右边= $\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] = \frac{1}{2}(b-a)(a^2+b^2)$

故 左边 $\neq$ 右边

公式具有1次代数精度.

结论：梯形公式具有一次代数精度。

若$f(x) = x^k$ ($k = 0, 1, 2,\cdots, n$), 由n+1个点插值得到的n次Lagrange插值函数得到的数值积分公式有等式：

$$\sum_{j=0}^{n} l_j(x)x_j^k = x^k \rightarrow \sum_{j=0}^{n} A_j x_j^k = \int_a^b x^k dx$$

即：$R[x^k] = 0$, ($k = 0,1,2,\cdots,n$)

根据代数精度定义，多项式f(x)次数<=n时，误差均为0，则此时的**插值型求积公式(实际上由n+1点得到)代数精度至少为n阶.**

例6 确定公式 $\int_0^{3h} f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(h) + A_2 f(2h)$

的代数精度 （其实你已经大概知道代数精度范围？）

解: 取$f(x)= 1, x, x^2$　若求积公式准确成立,则有

$$\begin{cases} 3h = A_0 + A_1 + A_2 \\ \dfrac{9}{2}h^2 = 0 + A_1 h + A_2 2h \\ 9h^3 = 0 + A_1 h^2 + 4h^2 A_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_0 = \dfrac{3}{4}h \\ A_1 = 0 \\ A_2 = \dfrac{9}{4}h \end{cases}$$

求积公式　$\int_0^{3h} f(x)dx \approx \frac{3h}{4} f(0) + \frac{9h}{4} f(2h)$

具有至少2阶代数精度

容易验证（按例1验证），对$f(x) = x^3$ 求积公式式不能准确成立. 因此这一公式只具有2阶代数精度

复合梯形求积公式

将积分区间$[a,b]$ n 等分.取 $h=(b-a)/n$. $x_j=a+jh$

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{n-1}[f(x_j)+f(x_{j+1})]$$

$$=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_j)]$$

$$T_n=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(a+jh)] \qquad h=\frac{b-a}{n}$$

$$T_{2n}=\frac{h_1}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{2n-1}f(a+jh_1)] \qquad h_1=\frac{h}{2}$$

$$T_{2n} = \frac{1}{2}[T_n + h\sum_{j=1}^{n} f(a + jh - \frac{h}{2})]$$

取 $T_1 = \dfrac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$ 递推，得

$$T_1 \to T_2 \to T_4 \to \cdots\cdots \to T_n \to T_{2n}$$

给定允许误差界ε>0,当 $\left|T_{2n} - T_n\right| \le \varepsilon$

以T_{2n}作为定积分的近似值

Newton-Cotes公式： **（书p167-p168，补充，自看）**

取等距结点$x_j = a + jh$时,插值型求积公式称为Newton-Cotes公式

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{n} l_j(x) f(x_j) \quad \rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$$

Newton-Cotes公式代数精度至少为n

定理7.1（书）：当n为偶数时, n阶Newton-Cotes公式至少有$(n+1)$阶代数精确度。

例题（自看）

例3 判明以下两个求积公式的代数精度。

(1) $$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{2}[f(-1)+2f(0)+f(1)]$$

解 (1) 记 $$I(f)=\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$I_1(f)=\frac{1}{2}[f(-1)+2f(0)+f(1)]$$

由于 $$I(1)=\int_{-1}^{1}dx=2 \qquad I_1(1)=\frac{1}{2}[1+2+1]=2$$

$$I(x)=\int_{-1}^{1}xdx=0 \qquad I_1(x)=\frac{1}{2}[-1+0+1]=0$$

$$I(x^2)=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3} \qquad I_1(x^2)=\frac{1}{2}[1+0+1]=1$$

故 $$I(1)=I_1(1), \qquad I(x)=I_1(x),$$

$$I(x^2)\neq I_1(x^2)$$

所以求积公式(1)具有一次代数精度。

学到了什么?

定积分数值计算方法

插值型求积公式

求积公式的代数精度

复合梯形公式