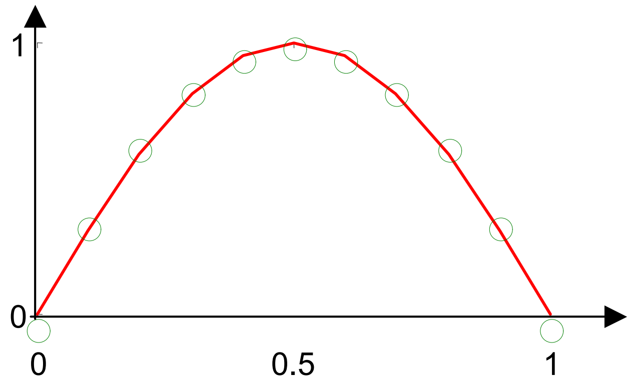
《数值分析》17

主要内容：

- 函数逼近与希尔伯特矩阵
- 切比雪夫多项式
- 勒让德多项式
- 正交多项式的应用

问题．求二次多项式 $P(x)= a_0 + a_1x + a_2x^2$ 使

$$\int_0^1 [P(x)-\sin(\pi x)]^2 dx = \min$$



连续函数的最佳平方逼近

已知 $f(x)\in C[0, 1]$, 求多项式

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n$$

使得 $$\boxed{L = \int_0^1 [P(x) - f(x)]^2 dx = \min}$$

令 $$L(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \int_0^1 [\sum_{j=0}^{n} a_j x^j - f(x)]^2 dx$$

$$L = \int_0^1 [\sum_{j=0}^{n} a_j x^j]^2 dx - 2\sum_{j=0}^{n} a_j \int_0^1 x^j f(x) dx + \int_0^1 [f(x)]^2 dx$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_k} = 2\sum_{j=0}^{n} a_j \int_0^1 x^{j+k}dx - 2\int_0^1 x^k f(x)dx$$

令 $\frac{\partial L}{\partial a_k} = 0$ 记 $b_k = \int_0^1 x^k f(x)dx$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/(n+1) & \cdots & \cdots & 1/(2n+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

系数矩阵被称为**Hilbert矩阵**

定义6.3 设 $f(x), g(x)\in C[a, b]$, $\rho(x)$是区间$[a,b]$上的权函数,若等式

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx=0$$

成立,则称$f(x), g(x)$在$[a, b]$上带权$\rho(x)$正交.
当$\rho(x)=1$时,简称正交。

例1 验证 $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=x$ 在$[-1, 1]$上正交,

并求二次多项式 $\varphi_2(x)$ 使之与$\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$正交

解:

$$\int_{-1}^{1}\varphi_0(x)\varphi_1(x)dx=\int_{-1}^{1}1\cdot xdx=0$$

设 $\varphi_2(x) = x^2 + a_{21}x + a_{22}$

$$\int_{-1}^{1} 1\cdot\varphi_2(x)dx = 0 \qquad \int_{-1}^{1} x\varphi_2(x)dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + a_{21}x + a_{22})dx = 0 \qquad \int_{-1}^{1} x(x^2 + a_{21}x + a_{22})dx = 0$$

$2/3+2a_{22} = 0$

$2a_{21}/3=0$

$a_{22}= - 1/3$

$a_{21}=0$

所以， $\varphi_2(x) = x^2 - \dfrac{1}{3}$

切比雪夫多项式:

$$T_0(x)=1,\ T_1(x)=\cos\theta=x,\ T_2(x)=\cos 2\theta\ \cdots\cdots$$

$$T_n(x)=\cos(n\theta),\cdots\cdots\cdots$$

1.递推公式

由 $\cos(n+1)\theta=2\cos\theta\cos(n\theta)-\cos(n-1)\theta$ 得

$$T_{n+1}(x)=2\,x\,T_n(x)-T_{n-1}(x)\qquad (n\geq 1)$$

所以, $T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,\ T_2(x)=2x^2-1,\ \cdots\cdots\cdots\cdots$

2.切比雪夫多项式的正交性

$$\int_0^{\pi}\cos(m\theta)\cos(n\theta)d\theta=0$$

$$(T_m,T_n)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_m(x)T_n(x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\cos m\theta\cos n\theta d\theta=0$$

所以, 切比雪夫多项式在$[-1,1]$上带权

$$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ 正交

勒让德(Legendre)多项式

1.表达式 $P_0(x)=1,\ P_1(x)=x$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \qquad (n\geq 1)$$

2. 正交性

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n\end{cases}$$

3.递推式

$$\begin{cases} p_0 = 1, \ p_1 = x, \\ p_{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1} x p_n - \dfrac{n}{n+1} p_{n-1} \end{cases}$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

4.零点分布

$P_n(x)$ 的n 个零点,落入区间$[-1, 1]$中

$P_2(x)$的两个零点: $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \qquad x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$P_3(x)$的三个零点: $x_1 = -\sqrt{\dfrac{3}{5}} \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$

用正交多项式作最佳平方逼近

设 $P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x)$ 为区间 $[a, b]$ 上的正交多项式, 即

$$(P_k, P_j) = \int_a^b P_k(x) P_j(x) dx = 0$$

$$(k \neq j, \ k, \ j = 0, 1, \cdots, n)$$

求 $P(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \cdots + a_n P_n(x)$

使 $$L = \int_a^b [P(x) - f(x)]^2 dx = \min$$

$$L(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \int_a^b [\sum_{j=0}^{n} a_j P_j(x) - f(x)]^2 dx$$

正交多项式的应用

$$\frac{\partial L}{\partial a_k} = 2\int_a^b P_k(x)[\sum_{j=0}^{n} a_j P_j(x) - f(x)]dx$$

由于 $(P_k, P_j) = \int_a^b P_k(x)P_j(x)dx = 0, \ (k \neq j)$

令 $\frac{\partial L}{\partial a_k} = 0$ 　　记 $(P_k, f) = \int_a^b P_k(x)f(x)dx$

则有 $(P_k, P_k)a_k = (P_k, f)$

$$a_k = \frac{(P_k, f)}{(P_k, P_k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

$f(x)$的平方逼近 $$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(P_k, f)}{(P_k, P_k)} P_k(x)$$

例 求二次多项式 $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ 使

$$\int_0^1 [P(x)-\sin(\pi x)]^2 dx = \min$$

构造区间[0，1]上的正交多项式

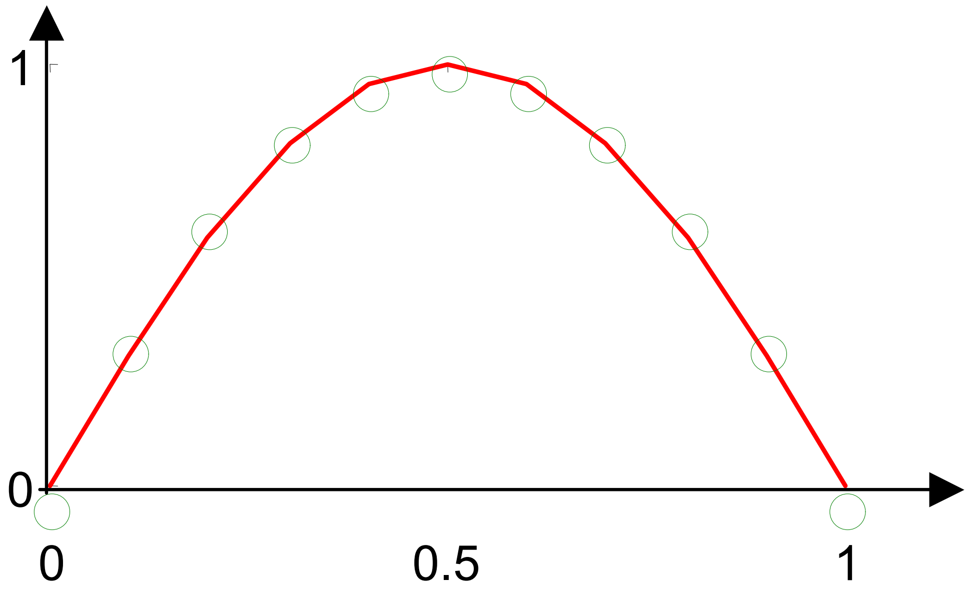
$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x-1/2,\quad P_2(x)=x^2-x+1/6$$

$$\sin(\pi x)\approx \frac{(P_0,\sin(\pi x))}{(P_0,P_0)}+\frac{(P_1,\sin(\pi x))}{(P_1,P_1)}P_1(x)+\frac{(P_2,\sin(\pi x))}{(P_2,P_2)}P_2(x)$$

$$\frac{(P_0,\sin(\pi x))}{(P_0,P_0)}=\frac{2/\pi}{1} \qquad \frac{(P_1.\sin(\pi x))}{(P_1,P_1)}=\frac{0}{1/12}$$

$$\frac{(P_2.\sin(\pi x))}{(P_2,P_2)}=\frac{(\pi^2-12)/3\pi^3}{1/180}$$

最佳平方逼近： $\sin(\pi x) \approx \frac{2}{\pi} - 4.1225(x^2 - x + \frac{1}{6})$



○ $P(x) = \frac{2}{\pi} - 4.1225(x^2 - x + \frac{1}{6})$

—— $f(x) = \sin(\pi x)$

MATLAB符号命令求解

```
syms x
P1=inline('x-.5');
P2=inline('x^2-x+1/6');
c0=int(sin(pi*x),0,1);
c1=int(P1(x)*sin(pi*x),0,1)/int(P1(x)*P1(x),0,1);
c2=int(P2(x)*sin(pi*x),0,1)/int(P2(x)*P2(x),0,1)
numeric([c0,c1,c2])
```

```
ans =    0.6366        0   -4.1225
```

```
P=inline('0.6366-4.1225*(x.^2-x+1/6)')
t=0:.1:1;y=sin(pi*t);pp=P(t);plot(t,y,t,pp,'o')
```

学到了什么?

函数逼近与希尔伯特矩阵

切比雪夫多项式

勒让德多项式

正交多项式的应用