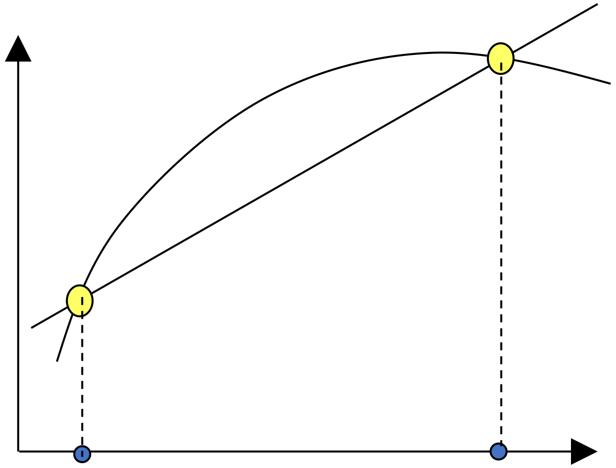
《数值分析》 12

主要内容：

- 拉格朗日插值误差余项
- 均差与牛顿插值公式
- 均差表的构造计算
- 牛顿多项式求值算法

两点线性插值

$$L(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1+\frac{x_1-x}{x_1-x_0}y_0$$



插值余项(误差):

$$R(x)=f(x)-L(x)$$

由插值条件,知

$$R(x)=C(x)\,(x-x_0)(x-x_1)$$

即 $f(x)-L(x)=C(x)\,(x-x_0)(x-x_1)$

$$\boxed{C(x)\;=\,???}$$

定理5.2 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $f(x)$ 在(a, b)内具有 $n+1$阶导数, 取插值结点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots\cdots < x_n \le b$$

则对任何$x \in [a , b]$, 满足 $L_n(x_k) = f(x_k)$ 的 n 次插值多项式$L_n(x)$ 的误差

$$\boxed{R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)}$$

其中, $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$

$\xi_n \in (a, b)$ 且与x有关

证明: 记 $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)$

由插值条件

$$L_n(x_k) = f(x_k) \qquad (k = 0,1,\ldots,n)$$

知存在$C(x)$使得

$$f(x) - L_n(x) = C(x)\ \omega_{n+1}(x)$$

取定 $x\in(a, b)$, 设 $t\in(a, b)$. 为了求$C(x)$, 构造函数

$$F(t) = f(t) - L_n(t) - C\omega_{n+1}(t)$$

显然, $F(x) = 0,\ F(x_j) = 0,\ (j = 0,1,\cdots,n)$

拉格朗日插值误差余项

$F(t)$ 有$(n+2)$个相异零点. 根据Rolle定理, $F'(t)$ 在区间(a, b)内至少有 $(n+1)$个相异零点.

依此类推,$F^{(n+1)}(t)$ 在区间(a, b)内至少有一个零点。故存在 $\xi \in (a, b)$, 使$F^{(n+1)}(\xi)=0$

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - L_n^{(n+1)}(t) - C\omega_{n+1}^{(n+1)}(t)$$

$$f^{(n+1)}(\xi) - C(n+1)! = 0$$

$$C = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \rightarrow \quad f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

例 分析三次多项式插值误差

$$f(x) = -2 + 5x - 7x^2 + 2x^3$$

x	0	1	2	3
$f(x)$	-2	-2	-4	4

$$R_3(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$f^{(4)}(x) = 0 \rightarrow R_3(x) = 0$$

$$L_3(x) = f(x) = -2 + 5x - 7x^2 + 2x^3$$

拉格朗日插值误差余项

例 取被插值函数为正弦函数 $f(x)=\sin x$，取三点做二次插值。

x	0	$\pi/2$	π
$\text{Sin}\ x$	0	1	0

$$L_2(x)=4x(\pi-x)/\pi^2$$

$$|R_2|=|\cos\xi|\cdot|x(x-\pi/2)(x-\pi)|/6$$

思考题：在区间 $[0,\ \pi]$ 内增加插值结点是否会导致Runge现象

例5.3 设 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$上有连续,且 $f(x)$ 在 (a, b)内具有2阶导数,已知$f(x)$在区间端点处的值.如果当$x\in(a, b)$时,有$|f''(x)|\le M$. 试证明

$$|R_1(x)| \le \frac{M}{8}(b-a)^2$$

证明 由Lagrange插值误差定理

$$R_1(x)=f(x)-L_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$$

令$h(x)=|(x-a)(x-b)|$

$$\max_{a\le x\le b} h(x)=h\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{(b-a)^2}{4} \qquad |R_1(x)| \le \frac{M}{8}(b-a)^2$$

应用: 考虑制做 $\sin x$ 在$[0, \pi]$上等距结点的函数表, 要求用线性插值计算非表格点数据时, 能准确到小数后两位, 问函数表中自变量数据的步长h应取多少为好?

解：设应取的步长为h, 则 $x_j = jh\ (j = 0,1,\cdots,n)$.

当 $x \in (x_j,\ x_{j+1})$时

$$\sin x \approx \frac{1}{h}[(x - x_j)\sin x_{j+1} + (x_{j+1} - x)\sin x_j]$$

$$|R(x)| \le \max_{x_j \le x \le x_{j+1}} |f''(x)| \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{8} = \frac{h^2}{8}$$

只须 $\frac{h^2}{8} \le \frac{1}{2} \times 10^{-2} \ \rightarrow\ h \le 0.2$

取x_0, x_1, x_2,求二次函数

$$P(x)=a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

满足条件

$$P(x_0)=f(x_0),\ P(x_1)=f(x_1),\ P(x_2)=f(x_2)$$

插值条件引出关于a_0, a_1, a_2方程

$$\boxed{\begin{cases} a_0 = f(x_0) \\ a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \\ a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2) \end{cases}}$$

定义5.3 若已知函数 $f(x)$ 在点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 处的值 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$.如果 $i \neq j$,则

一阶均差 $$f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}$$

二阶均差 $$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = \frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}] - f[x_j, x_{j+1}]}{x_{j+2} - x_j}$$

$(j = 0,1,\ldots,n\text{-}2)$

n阶均差 $$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_1, \cdots, x_n] - f[x_0, \cdots x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

例 由函数表求各阶均差

x	-2	-1	0	1	3
y	-56	-16	-2	-2	4

解:按公式计算一阶均差、二阶均差、三阶均差

x	$f(x)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
-2	-56			
-1	-16	40		
0	-2	14	-13	
1	-2	0	-7	2
3	4	3	1	2

均差表的构造计算

MATLAB程序计算

```
x=[-2 -1 0 1 3]';
y=[-56 -16 -2 -2 4]';
data=[x,y];dy=y;

n=length(x);
for k=1:n-1
   dx=x(k+1:n)-x(1:n-k)
   dy=diff(dy)./dx;
   f=zeros(n,1);f(k+1:n)=dy;
   data=[data,f];
end
data
```

-2	-56				
-1	-16	40			
0	-2	14	-13		
1	-2	0	-7	2	
3	4	3	1	2	0

$$N_3(x) = -56 + 40(x+2) - 13(x+2)(x+1) + 2(x+2)(x+1)\,x$$

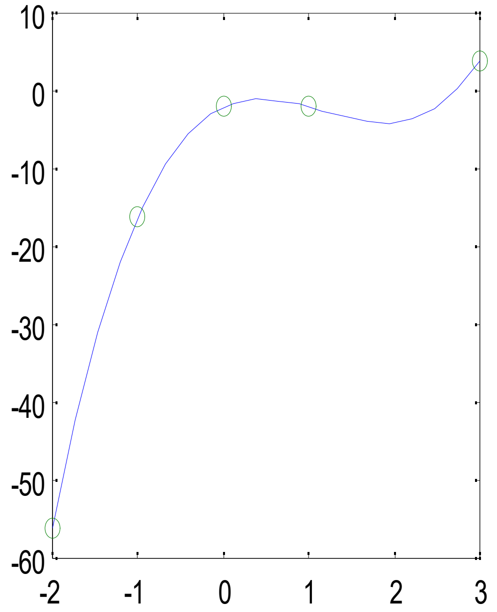
$$a_0 = -56 + 80 - 26 = -2$$

$$a_1 = 40 - 39 + 4 = 5$$

$$a_2 = -13 + 6 = -7$$

$$a_3 = 2$$

$$P_3(x) = -2 + 5x - 7x^2 + 2x^3$$



函数值的计算:

$$N_3(x) = -56 + (x+2)\,[40 + (x+1)\,[-13 + 2\,x]]$$

牛顿多项式算法: 记插值节点为$x_0,x_1,\cdots,x_n$, $f(x)$的各阶差商为 $f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n$

(1)$s \leftarrow f_n$

(2)计算 $s \leftarrow f_k + (x-x_k) * s$　　$(k=n-1,n-2,\cdots,0)$

(3) $N(x)=s$

根据代数插值存在唯一性定理, n 次牛顿插值公式恒等于n次拉格朗日插值公式,误差余项也相等，即

$$\boxed{\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \\ \omega_{n+1}(x) &= (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \end{aligned}}$$

小 结

前面已经学过两种插值方法：

Langrange插值法、Newton插值法。

共同点:

1）插值条件相同，即

x_i	x_0	x_1	…	x_n
$y_i=f(x_i)$	y_0	y_1	…	y_n

2）求一个次数不超过n的代数多项式

不同点： 构造方法（思想）不同

Langrange插值法采用基函数的思想

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

Newton插值法采用承袭性的思想　$\boxed{\text{均差表}}$

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)$$
$$+\cdots+f[x_0,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

注：两种方法的结果相同（唯一性）！

学到了什么?

拉格朗日插值误差余项

均差与牛顿插值公式

均差表的构造计算

牛顿多项式求值算法