6.4 二次曲面

主要内容：

- 椭球面
- 抛物面
- 双曲面
- 空间立体或曲面在坐标面上的投影

二次方程

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

所表示的曲面称为二次曲面.

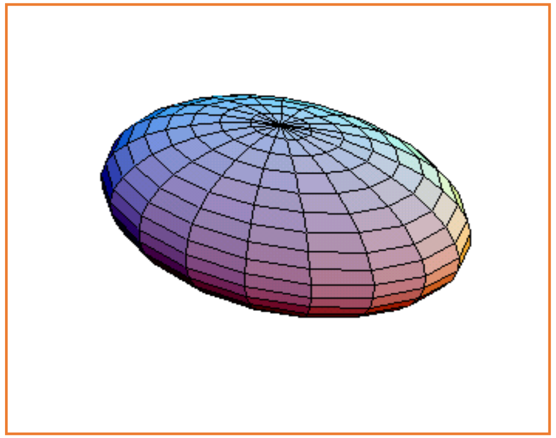
讨论二次曲面的性质使用截痕法：

用坐标面或坐标面平行的平面与曲面相截，考察所得交线（截痕）的形状，通过截痕形状研究曲面的性状.

一. 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$(a>0, b>0, c>0)$$



1. 范围: $|x|\le a,\ |y|\le b,\ |z|\le c$.

   图形在 $x=\pm a,\ y=\pm b,\ z=\pm c$ 所围成的长方体内.

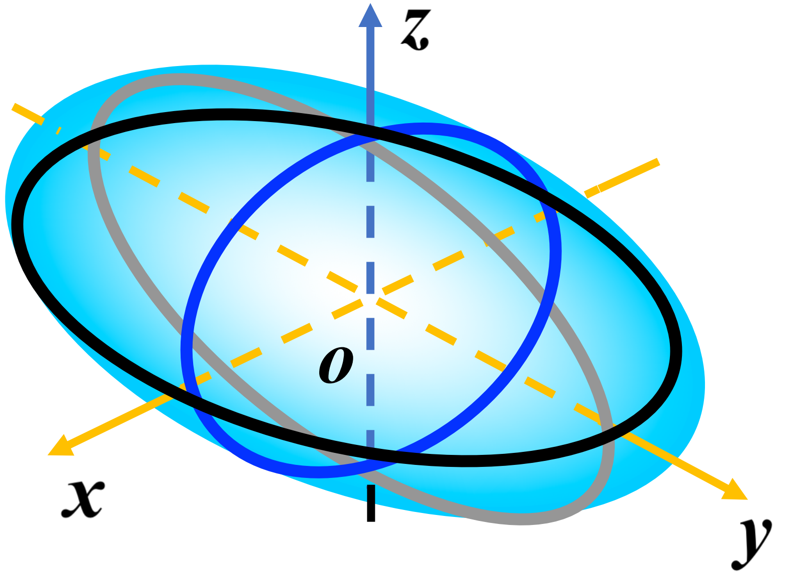
2. 对称性: 图形关于三个坐标面、三个坐标轴及原点对称.

3. 截 痕

椭球面与三个坐标面的交线：

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \\ x=0 \end{cases}$$



椭球面与平面 $z = z_1$ 的交线为椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\dfrac{a^2}{c^2}(c^2 - z_1^2)} + \dfrac{y^2}{\dfrac{b^2}{c^2}(c^2 - z_1^2)} = 1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

同理与平面 $x = x_1$ 和 $y = y_1$ 的交线也是椭圆.

椭圆截面的大小随平面位置的变化而变化.

椭球面的几种特殊情况：

(1) $a=b$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 旋转椭球面

由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 轴旋转而成

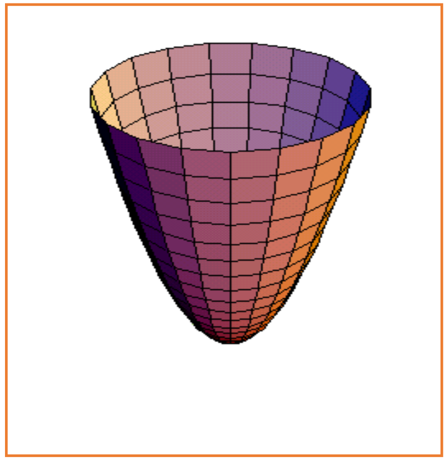
方程可写为 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

(2) $a=b=c$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1$ 球面

方程可写为 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

二. 抛物面

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad （p 与 q 同号）$$



(1) 范围：若$p>0$且$q>0$, 则

图形在 xy 平面上方，否则在 xy 平面下方.

(2) 对称性：图形关于z 轴、yz 平面、xz 平面对称.

(3) **截 痕**

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\qquad \text{设 } p>0,\ q>0$$

1^0 用坐标面 $xoy\,(z=0)$ 与曲面相截

截得一点，即坐标原点 $O(0,0,0)$

原点也叫椭圆抛物面的**顶点**.

与平面 $z=z_1\ (z_1>0)$ 的交线为椭圆.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2pz_1}+\dfrac{y^2}{2qz_1}=1 \\ z=z_1 \end{cases}$$

当 z_1 变动时，这种椭圆的中心都在 z 轴上.

与平面 $z=z_1\ (z_1<0)$ 不相交.

2^0 用坐标面 $xoz\ (y=0)$ 与曲面相截

截得抛物线 $\begin{cases} x^2=2pz \\ y=0 \end{cases}$

与平面 $y=y_1$ 的交线为抛物线.

$$\begin{cases} x^2 = 2p\left(z - \dfrac{y_1^2}{2q}\right) \\ y = y_1 \end{cases}$$

它的轴平行于　轴

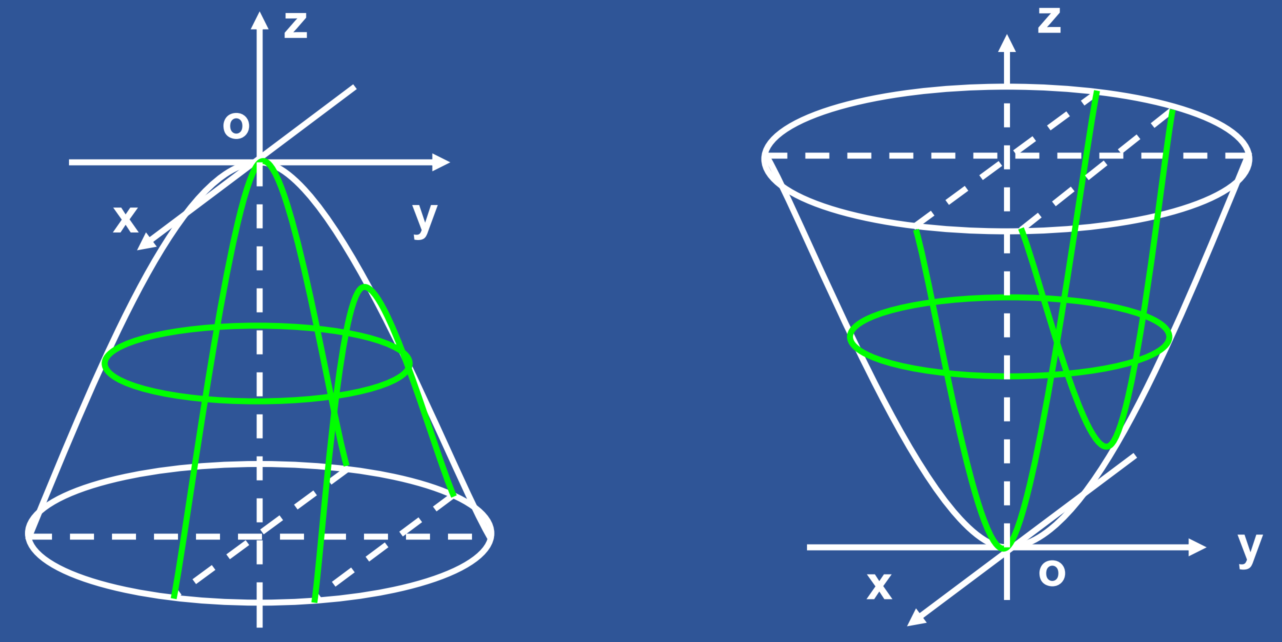
顶点 $\left(0, y_1, \dfrac{y_1^2}{2q}\right)$

3^0　用坐标面　$yoz\ (x=0)$，$x=x_1$ 与曲面相截

均可得抛物线.

同理当 $p<0,\ q<0$　时可类似讨论.

椭圆抛物面的图形如下：



$p<0,\quad q<0$　　　　$p>0,\quad q>0$

特殊地：当 $p=q$ 时，方程变为

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z \quad (p>0)$$ 旋转抛物面

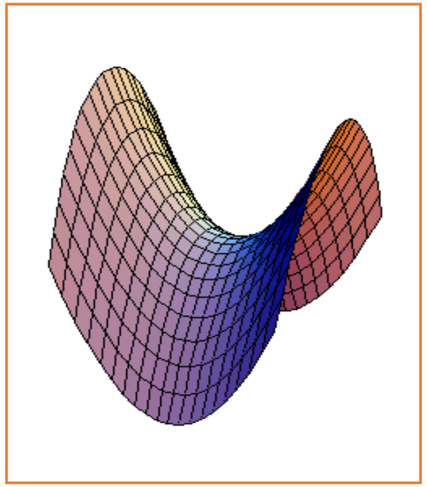
（由 xoz 面上的抛物线 $x^2=2pz$ 绕它的轴旋转而成的）

与平面 $z=z_1$ $(z_1>0)$ 的交线为圆.

$$\begin{cases} x^2+y^2=2pz_1 \\ z=z_1 \end{cases}$$

当 z_1 变动时，这种圆的中心都在 z 轴上.

2. 双曲抛物面



$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}, \quad (pq > 0)$$

(1) 范围: $x, y, z \in \mathbf{R}$, 曲面可向各方向无限延伸.

(2) 对称性: 图形关于z轴、yz平面、xz平面对称.

(3) 截 痕 （设 $p<0,\ q<0$）

用平面$z=z_0\ (z_0\neq 0)$截曲面所得截痕为双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2pz_0}-\dfrac{y^2}{2qz_0}=1\\ z=z_0\end{cases}$$

用平面$x=x_0$与$y=y_0$截曲面所得截痕为

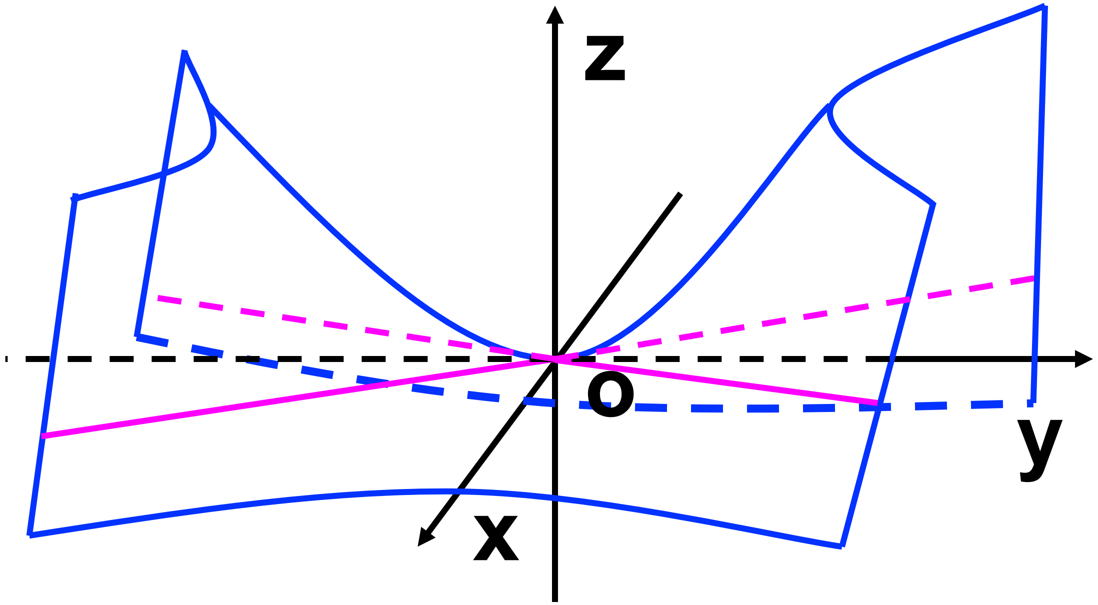
$$\begin{cases}z=\dfrac{x_0^{\ 2}}{2p}-\dfrac{y^2}{2q}\\ x=x_0\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}z=\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y_0^{\ 2}}{2q}\\ y=y_0\end{cases}$$

这是两条抛物线.

双曲抛物面

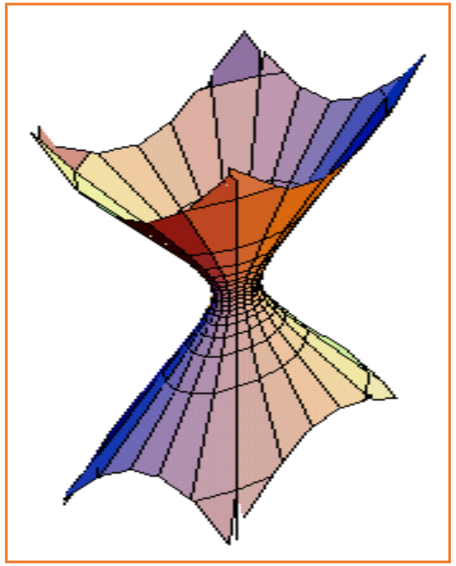
$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q},\ (p<0,\ q<0)$$

图形如下：



三. 双曲面

1. 单叶双曲面



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(1) 范围: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geq 1$

故曲面在椭圆面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的外部;

(2) 对称性: 图形关于三个坐标轴、三个坐标面以及原点都对称.

(3) 截 痕

用平面$z=z_0$截曲面所得截痕为椭圆：

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{z^2}{c^2} \\ z=z_0 \end{cases}$$

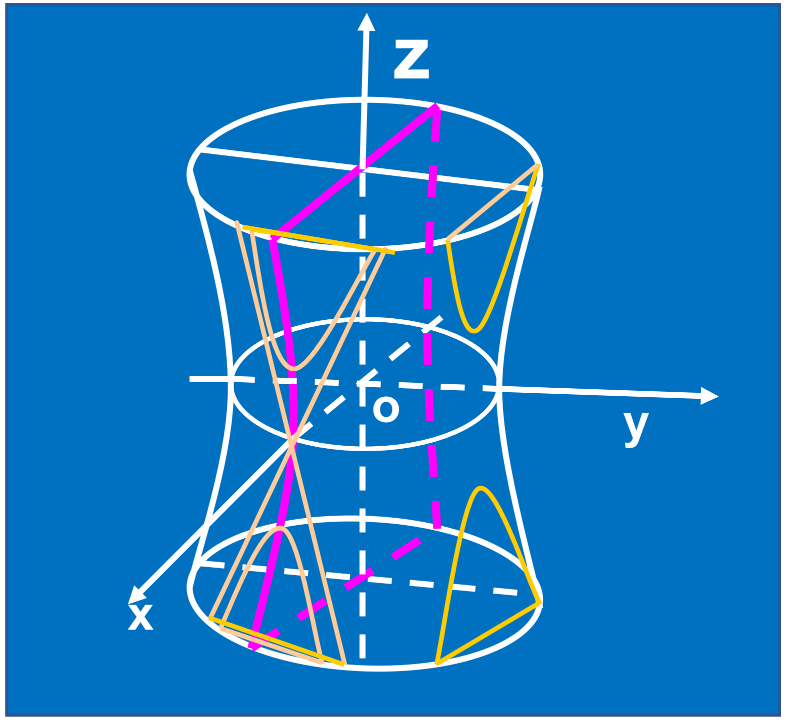
用平面$x=x_0$，$y=y_0$截曲面所得截痕为：

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{x_0^2}{a^2} \\ x=x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y_0^2}{b^2} \\ y=y_0 \end{cases}$$

这是两条双曲线.

单叶双曲面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

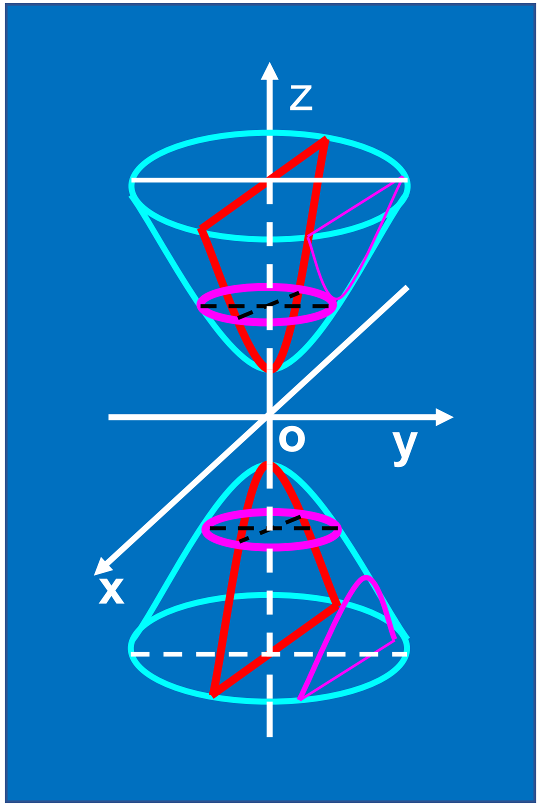
的图形如下：

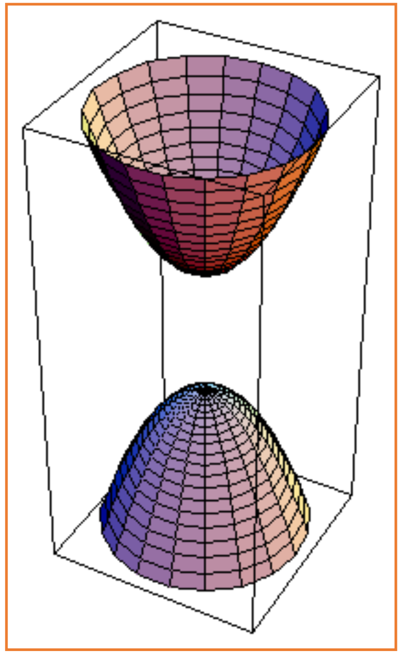


思考题： $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的形状如何？

2. 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$





思考题: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ 的图形怎样?

例 $z = f(x, y) = xy$ 表示什么曲面？

解

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda + \frac{1}{2}), \qquad \lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2},$$

存在正交变换 $X = CY$ 使

$$z = f = \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2$$

$z = xy$ 为双曲抛物面.

例4 设 $f(x_1, x_2, x_3) = X^{\mathrm{T}}AX$ 为实二次型，则

$f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 为椭球面 $\Leftrightarrow A$ 为正定矩阵.

证 将 $f(X) = X^{\mathrm{T}}AX$ 用正交变换 $X = CY$ 化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$$

则

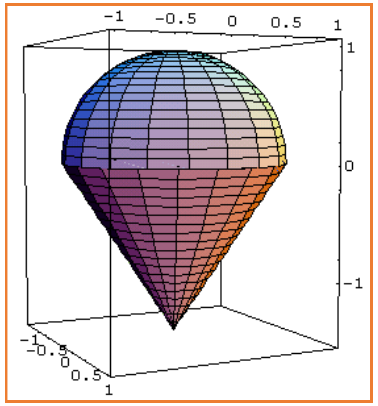
$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 1$ 为椭球面

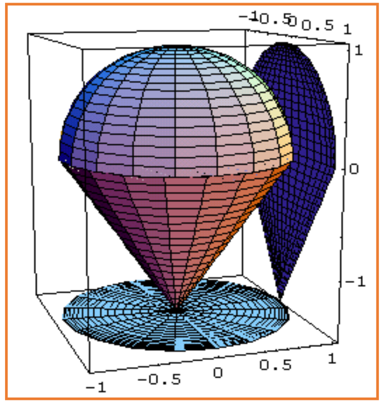
$\Leftrightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 全为正数

$\Leftrightarrow$ A 为正定矩阵.

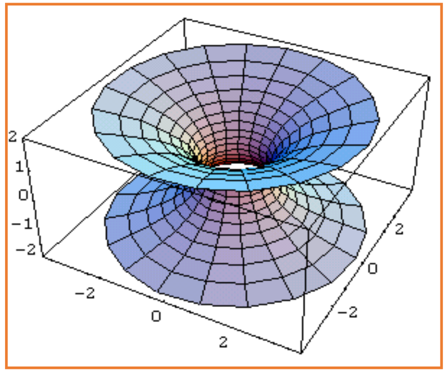
四. 空间立体或曲面在坐标面上的投影

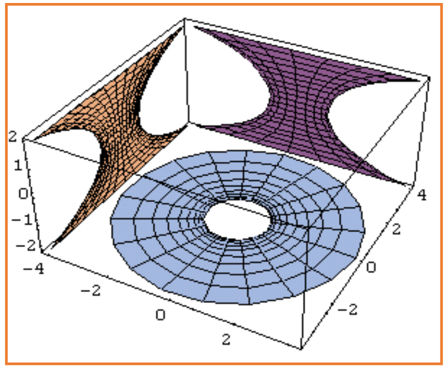
空间立体





曲面





学到了什么?

椭球面

抛物面

双曲面

空间立体或曲面在坐标面上的投影