6.3 曲面与空间曲线

主要内容：

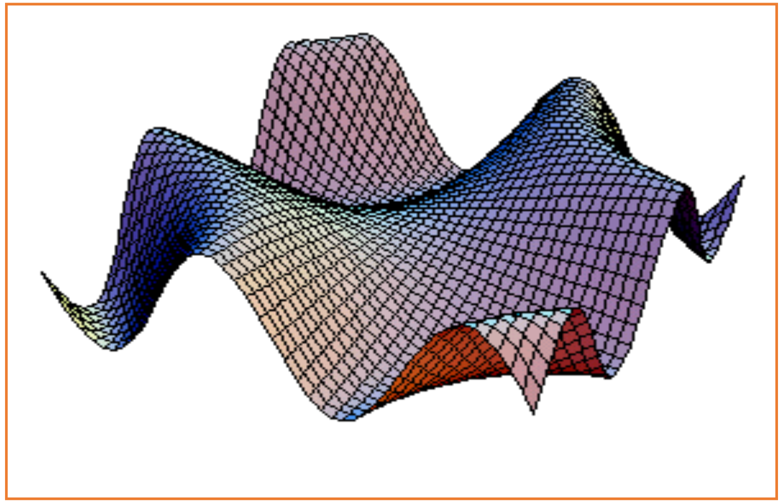
- 曲面
- 旋转曲面
- 空间曲线

一. 曲 面

定义 空间点集

$$S = \{(x, y, z) | F(x, y, z) = 0\}$$

称为由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的曲面.



(1) S 上的点都满足 $F(x, y, z) = 0$;

(2) 满足 $F(x, y, z) = 0$ 的点都在 S 上.

例 1 建立球心在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$、半径为 R 的球面方程.

解 设$M(x, y, z)$是球面上任一点,

根据题意有 $\| MM_0 \| = R$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

所求方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

特殊地：球心在原点时方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

例2 方程$z=(x-1)^2+(y-2)^2-1$ 的图形是怎样的？

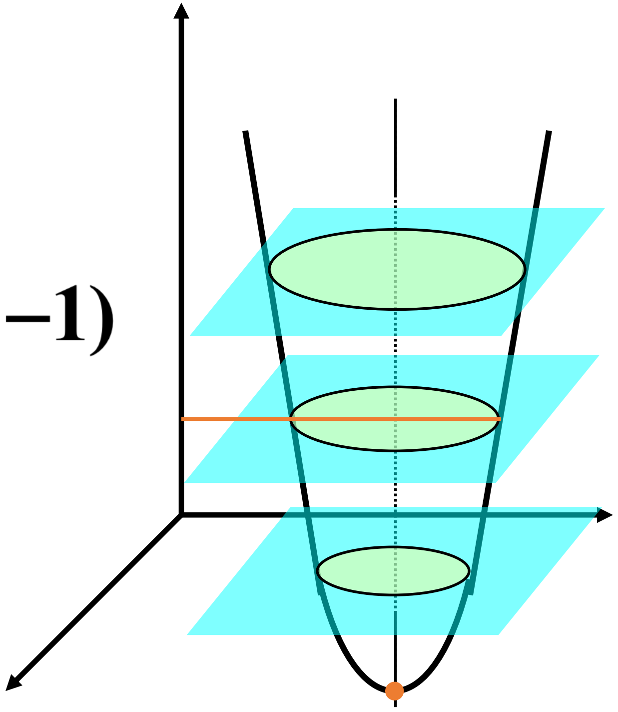
解 根据题意有 $z\geq -1$

用平面$z=c$去截图形得圆：

$(x-1)^2+(y-2)^2=1+c \quad (c\geq -1)$

当平面$z=c$上下移动时，

得到一系列圆



圆心在$(1,2,c)$，半径为$\sqrt{1+c}$

半径随c的增大而增大. 图形上不封顶，下封底.

由以上二例可见，研究曲面有两个基本问题：

(1) 已知曲面作为满足某些条件的点集，求曲面方程；

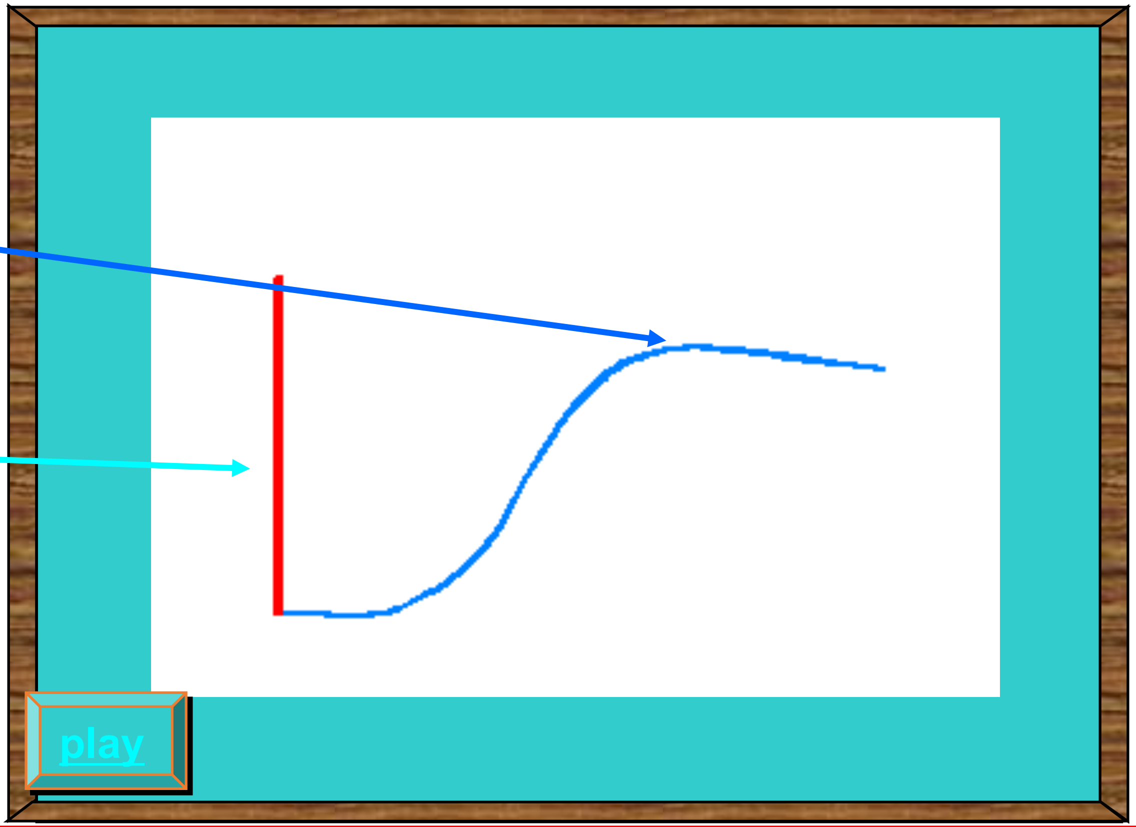
(2) 已知曲面方程，研究曲面形状.

1. 柱 面

定义 与定曲线C相交，与某一定直线平行的动直线L所形成的曲面称为柱面.

曲线C称为准线

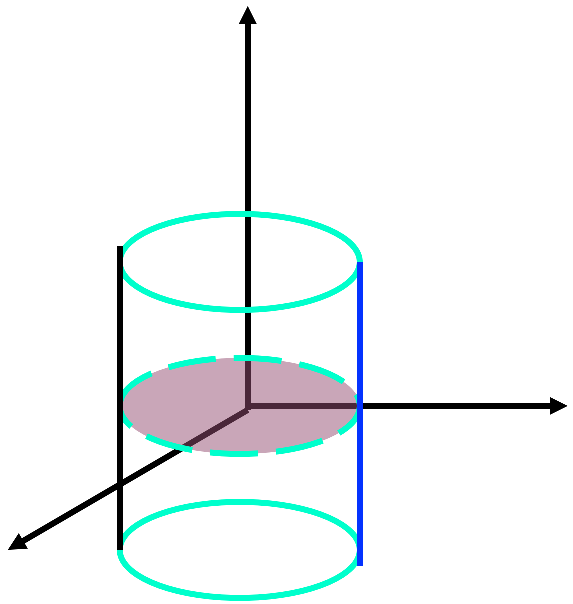
L称为母线



例3 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\quad b>0)$$

准线C是xy平面上的椭圆.

母线l与z轴平行.



$$S=\{(x,y,z)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\}$$

S：椭圆柱面

$a=b$：圆柱面

例4　$y^2 = 2x$

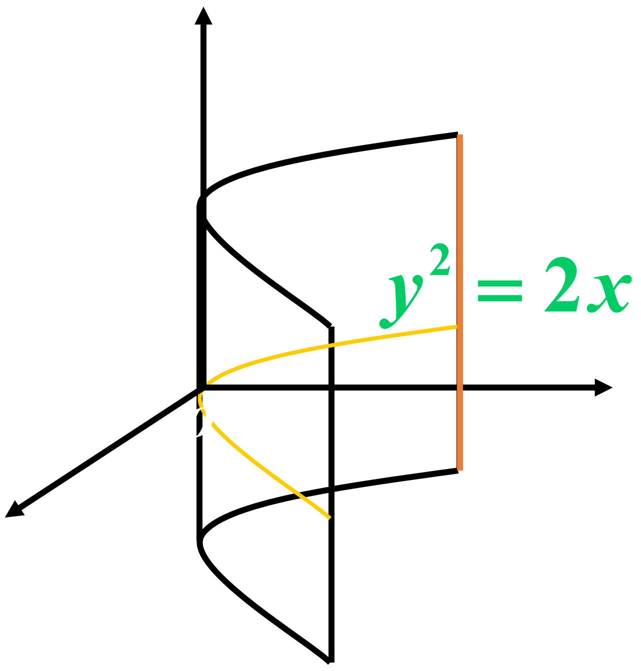
$$S = \{ (x, y, z) \mid y^2 = 2x \}$$

准线：xy 平面上的抛物线

$y^2 = 2x.$

母线：与z轴平行.

S：抛物柱面



例5 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\quad b>0)$

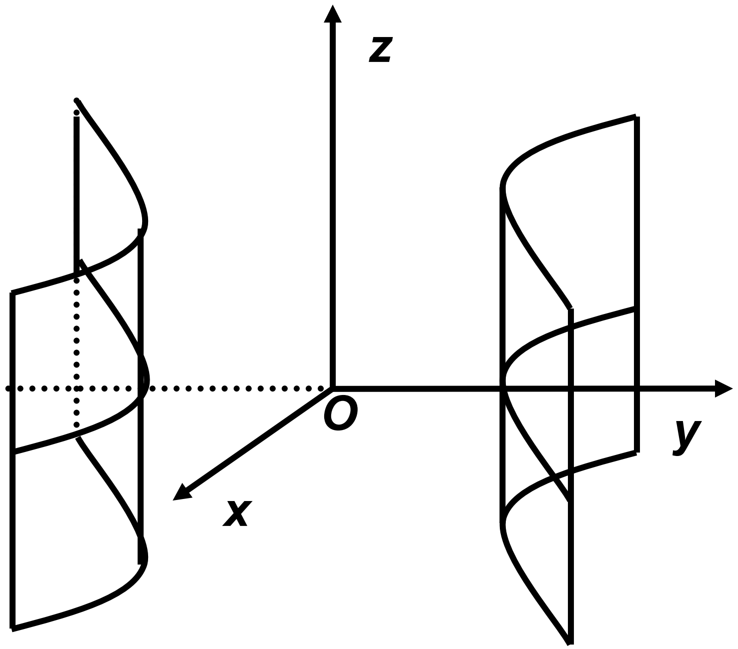
$$S=\{(x,y,z)\mid \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\}$$

准线：xy 平面上的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

母线：与z 轴平行.

S：双曲柱面



柱面方程的特征：

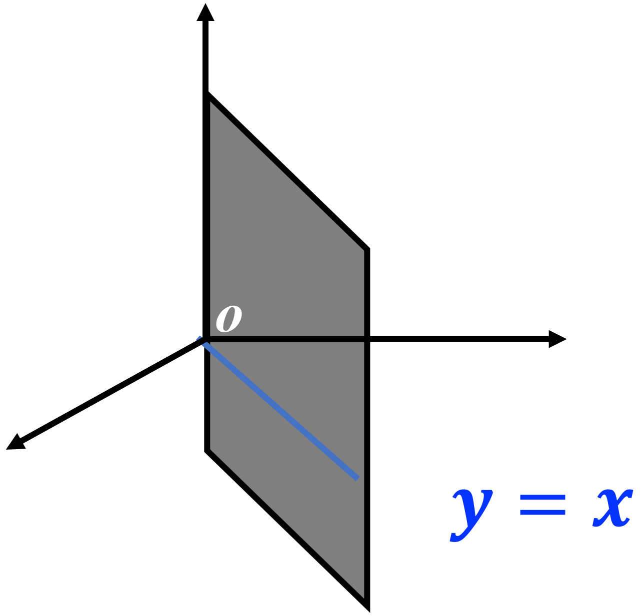
(1) $F(x, y) = 0$：准线是 xy 平面上的曲线 $F(x, y) = 0$，母线与 z 轴平行；

(2) $G(x, z) = 0$：准线是 xz 平面上的曲线 $G(x, z) = 0$，母线与 y 轴平行；

(3) $H(y, z) = 0$：准线是 yz 平面上的曲线 $H(y, z) = 0$，母线与 x 轴平行；

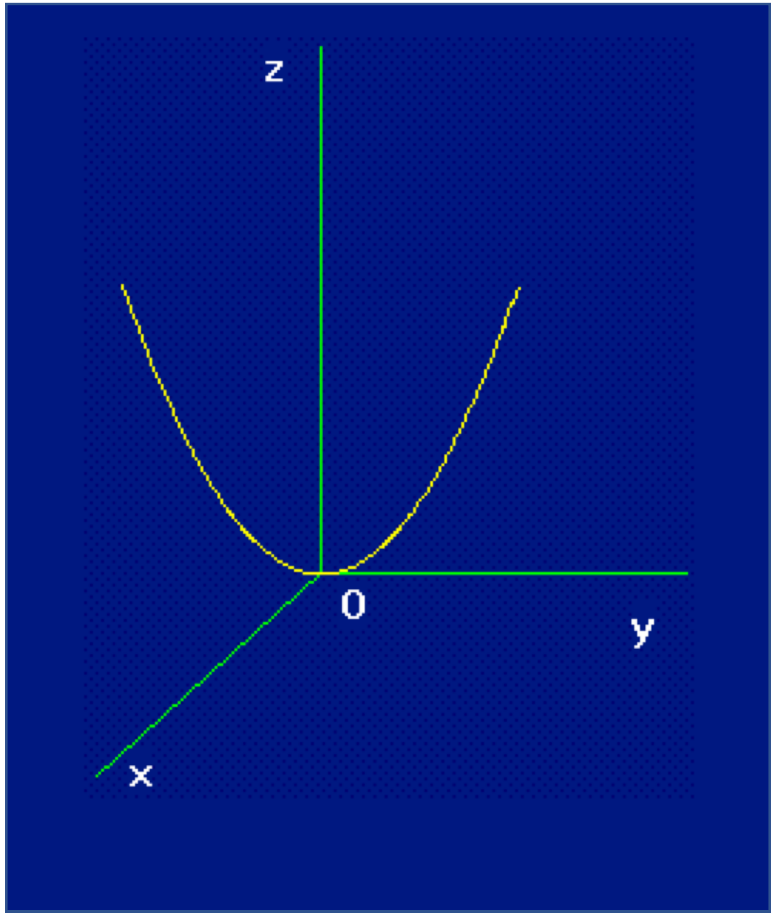
例6 $y=x$ 在 xy 平面上，$y=x$ 是一条直线.

在空间直角坐标系 O - xyz 中，$y=x$ 是一张平面. 它也可以看成是以 xy 平面上的直线 $y=x$ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面.



二、旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕该平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.



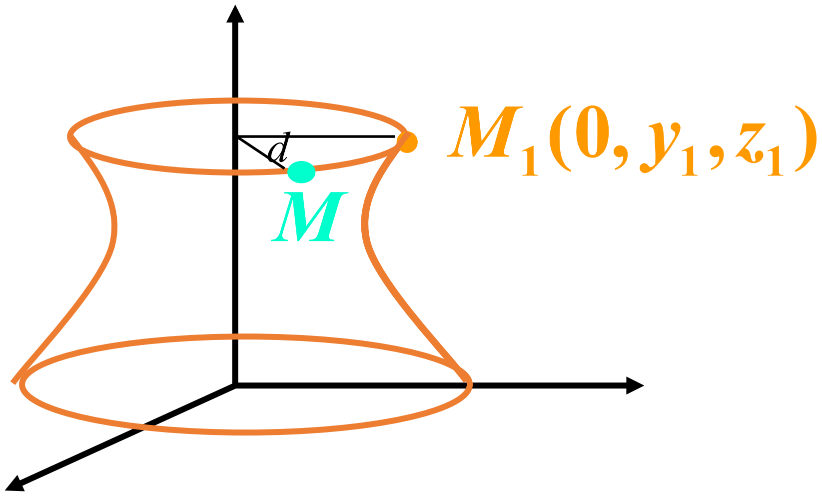
这条定直线叫旋转曲面的轴.

例7　求yz 平面上的曲线 $f(y,z)=0$ 绕z 轴旋转一周所得空间曲面的方程.

解　设$M_1(0,y_1,z_1)$是曲线$f(y,z)=0$上的一个点，　$M(x,y,z)$ 是M_1在旋转过程中所产生的任一点，则有

(1)　$z=z_1$

(2)　点M 到z 轴的距离



将 $z = z_1$， $y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ 代入 $f(y_1, z_1) = 0$

得方程 $$f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2},\ z\right) = 0,$$

yoz坐标面上的已知曲线$f(y, z) = 0$绕z轴旋转一周的旋转曲面方程.

同理，yoz坐标面上的已知曲线$f(y, z) = 0$绕y轴旋转一周的旋转曲面方程为

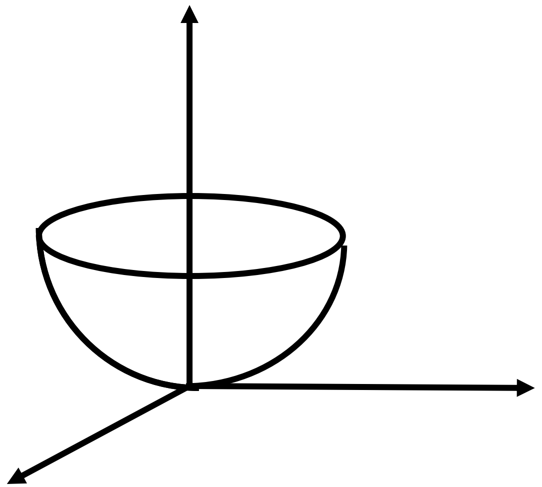
$$f\left(y,\ \pm\sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0.$$

例8 方程 $z = x^2 + y^2$ 表示什么曲面？

解 $z = x^2 + y^2 = (\pm\sqrt{x^2 + y^2})^2$

即，曲面 $z = x^2 + y^2$ 可以看作是：

xz 平面上的抛物线 $z = x^2$ 绕 z 轴旋转一周所得到的旋转抛物面.



这个也可看作是：

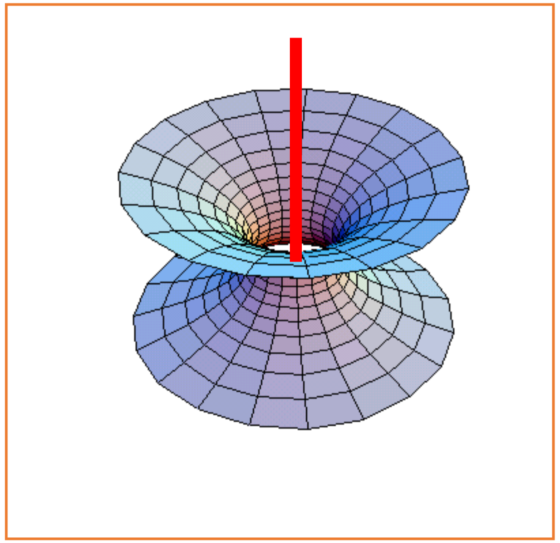
yz 平面上的抛物线 $z = y^2$ 绕 z 轴旋转一周所产生的.

例9 将下列各曲线绕对应的轴旋转一周，求生成的旋转曲面的方程.

（1）双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴；

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

旋转双曲面.



（2）椭圆 $\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴和 z 轴；

绕 y 轴旋转 $$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1$$

绕 z 轴旋转 $$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

旋转椭球面

一般地，设有平面曲线 $L:\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

(1) 曲线 L 绕 x 轴旋转所成的旋转曲面方程为

$$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$$

(2) 曲线 L 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$$

同样可讨论平面曲线 L': $\begin{cases} f(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$

绕 x 轴或 z 轴旋转所成的曲面方程.

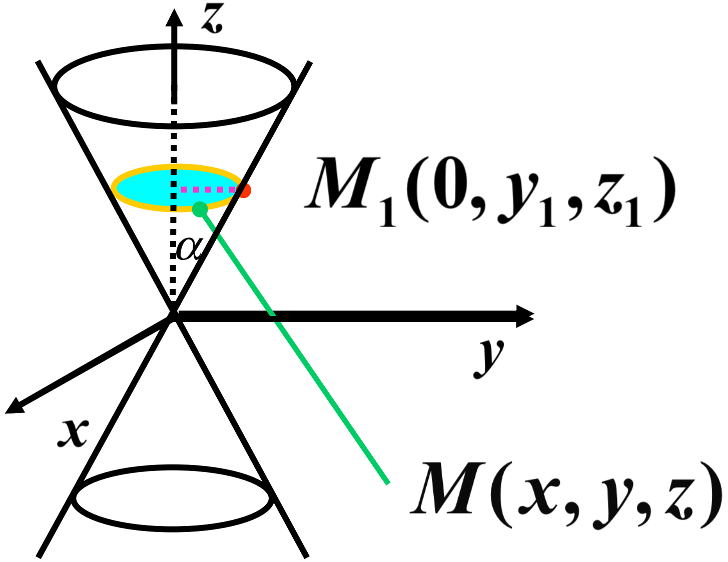
例 10 直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周，所得旋转曲面叫圆锥面．两直线的交点叫圆锥面的顶点，两直线的夹角 $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 叫圆锥面的半顶角．试建立顶点在坐标原点，旋转轴为 z 轴，半顶角为 α 的圆锥面方程．

解 yoz 面上直线方程为

$$z = y\cot\alpha$$

圆锥面方程

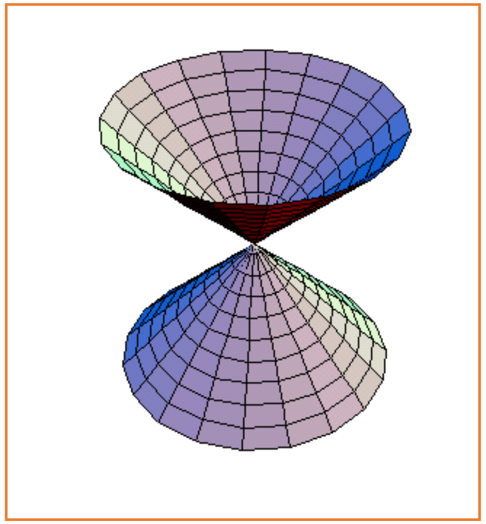
$$z = \pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha$$



如果半顶角$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, 则 $\cot\alpha = 1$.

圆锥面方程为

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

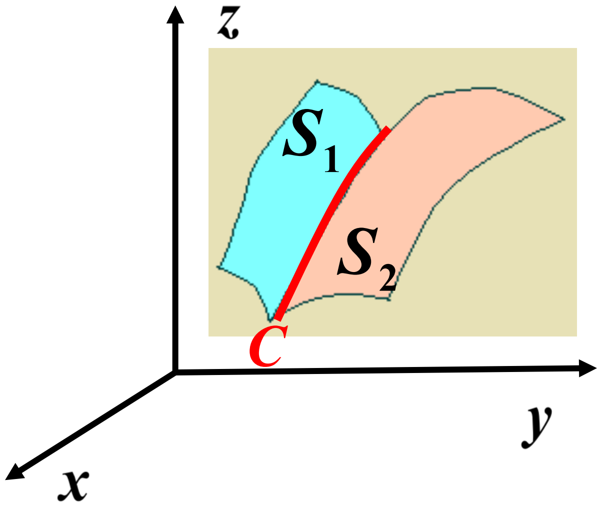


三. 空间曲线

1. 一般方程

空间曲线*C*可看作空间两曲面的交线.

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



上式称为空间曲线的一般方程.

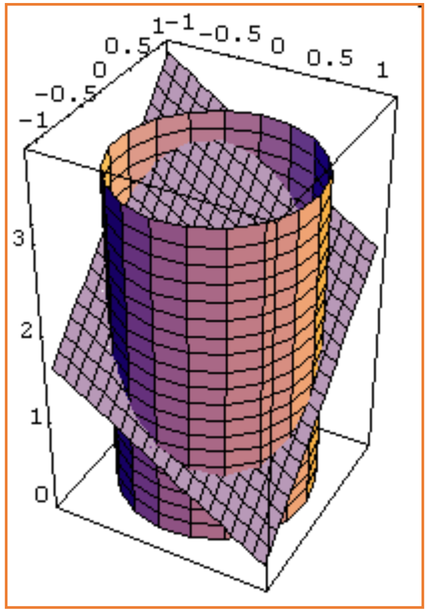
例12 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3y+3z=6 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 $x^2+y^2=1$ 表示圆柱面,

$2x+3y+3z=6$ 表示平面,

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3y+3z=6 \end{cases}$$

交线为椭圆.



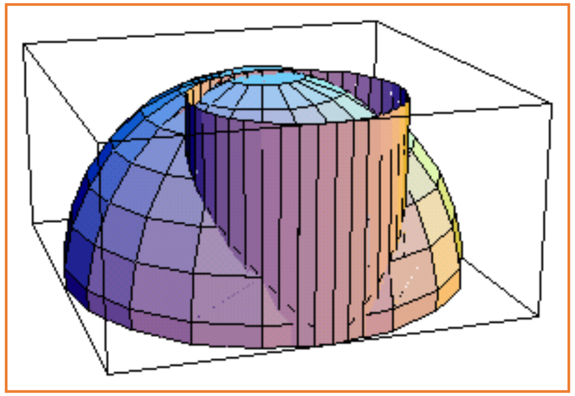
例13 方程组 $\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ (x - \dfrac{a}{2})^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{4} \end{cases}$ 表示怎样的曲线？

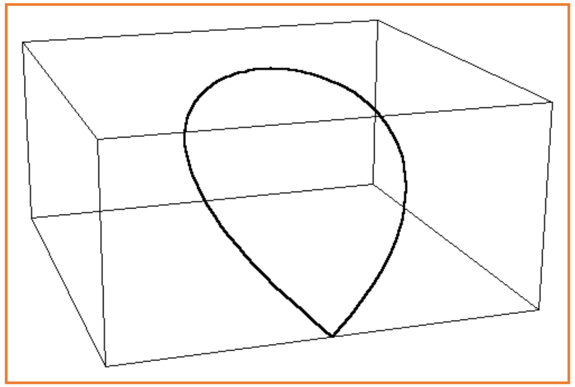
解 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

上半球面,

$$(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$ 圆柱面,

交线如图.





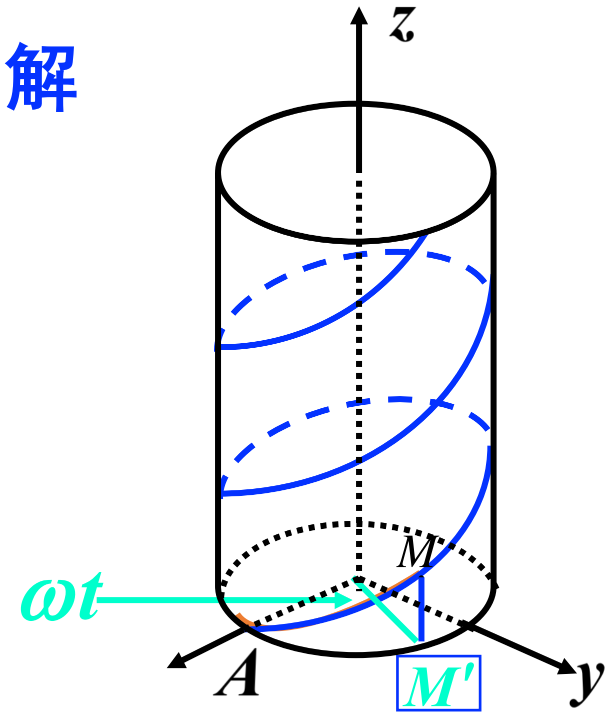
2. 参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ 称为空间曲线的**参数方程**.

当给定 $t = t_1$ 时，就得到曲线上的一个点 (x_1, y_1, z_1)，当 t 取遍允许取的全部值时，就得到曲线上的所有点.

例 14　如果空间一点M在圆柱面$x^2+y^2=a^2$上以角速度ω绕z轴旋转，同时又以线速度v沿平行于z轴的正方向上升（其中ω、v都是常数），那么点M构成的图形叫做螺旋线．试建立其参数方程．

解



取时间t为参数，动点从A点出发，经过t时间，运动到M点

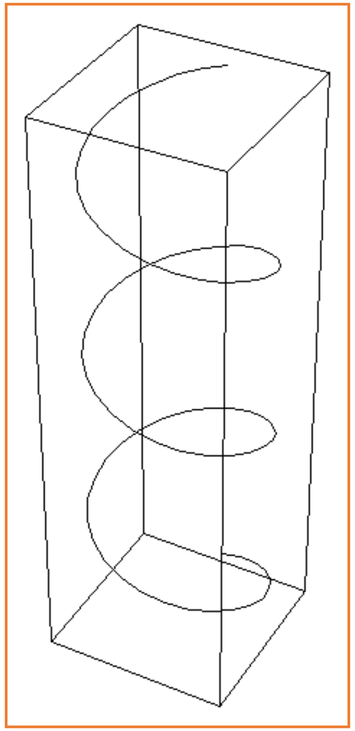
M在xoy面的投影$M'(x,y,0)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a\cos\omega t \\ y &= a\sin\omega t \\ z &= vt \end{aligned}}$$

螺旋线的参数方程

螺旋线的参数方程还可以写为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases} \qquad (\theta = \omega t,\quad b = \frac{v}{\omega})$$



螺旋线的重要性质：

上升的高度与转过的角度成正比.

即 $\theta:\quad \theta_0 \to \theta_0 + \alpha,\qquad z:\quad b\theta_0 \to b\theta_0 + b\alpha,$

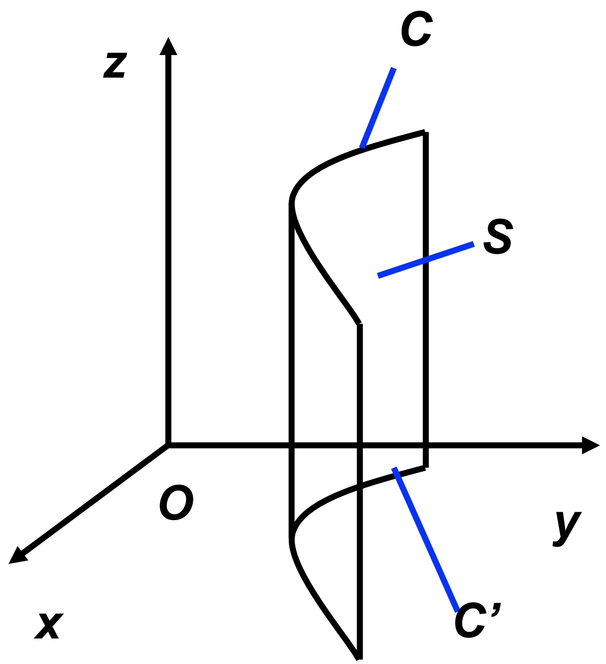
$\alpha = 2\pi,$ 上升的高度 $\boxed{h = 2b\pi}$ 螺距

3. 空间曲线在坐标面上的投影

C: 空间曲线

S: 以C为准线，母线与z 轴平行的曲面，称为投影柱面.

C': C在xy 平面上的投影.



设空间曲线的一般方程：

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad (*)$$

确定*C* 在*xy* 平面上的投影的一般过程为：

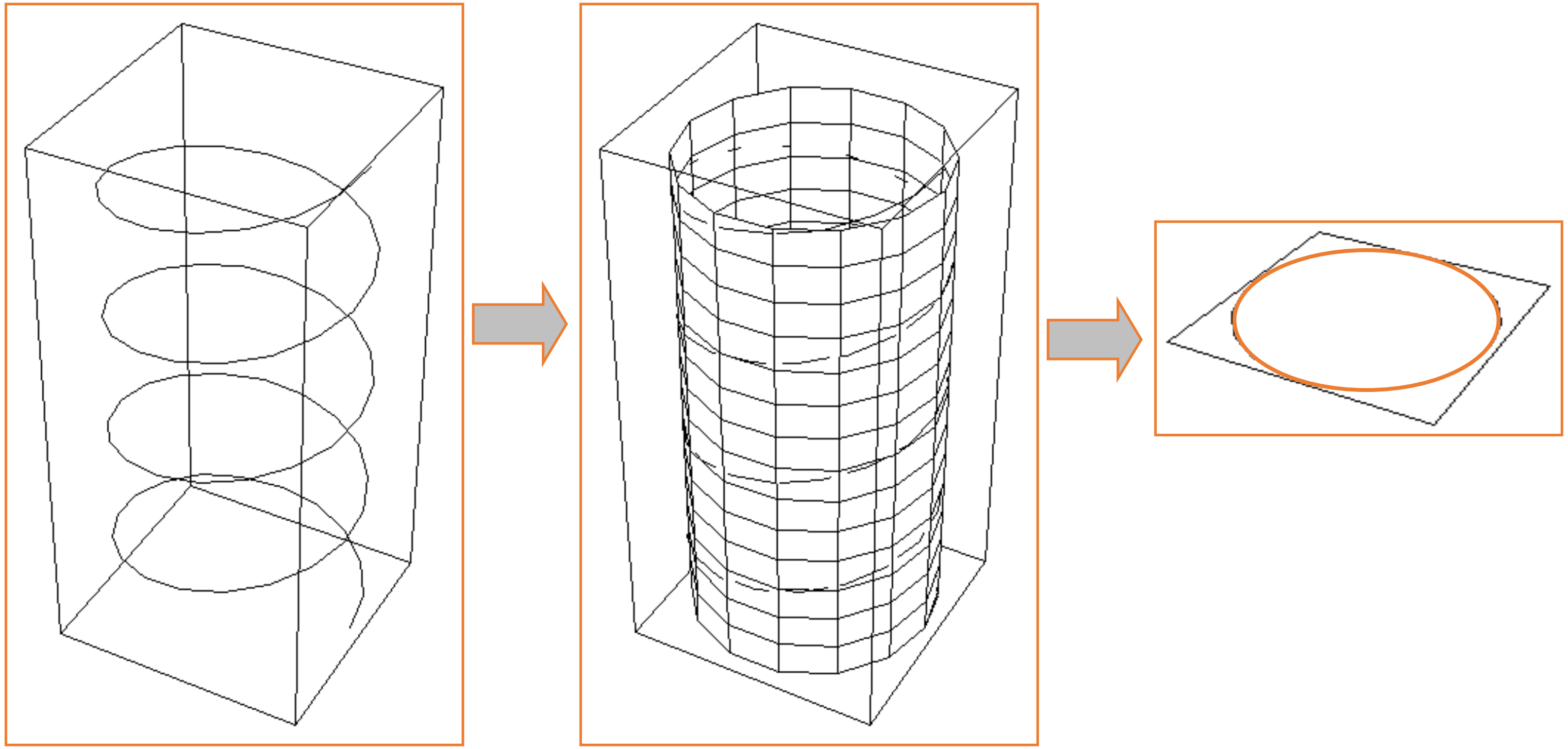
(1) 在(*)式中消去*Z*， 得投影柱面方程

$$H(x,y)=0$$

(2) $C':\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 就是*C* 在*xy* 平面上的投影方程.

空间曲线

投影曲线的研究过程可用下面的几何图形表示：



空间曲线　　投影柱面　　投影曲线

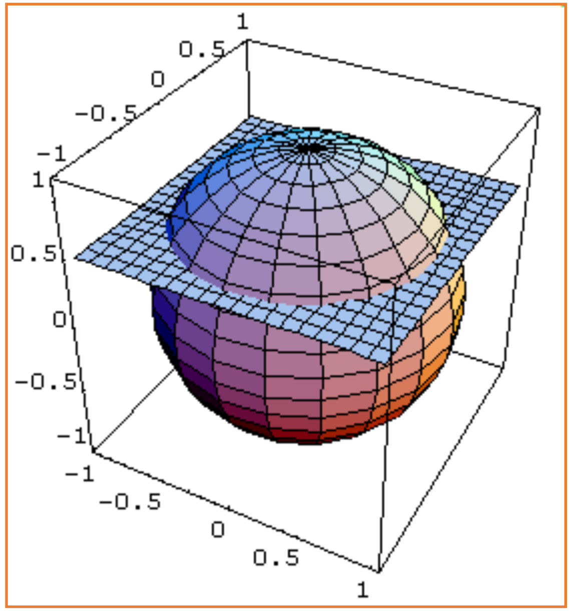
例15 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在坐标面上的投影.

解 （1）消去变量z后得

$$x^2+y^2=\frac{3}{4},$$

在 xoy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4}, \\ z=0 \end{cases}$$



（2）因为曲线在平面 $z=\frac{1}{2}$ 上，

所以在 xoz 面上的投影为线段.

$$\begin{cases} z=\frac{1}{2}, \\ y=0 \end{cases} \qquad |x|\le\frac{\sqrt{3}}{2};$$

（3）同理在 yoz 面上的投影也为线段.

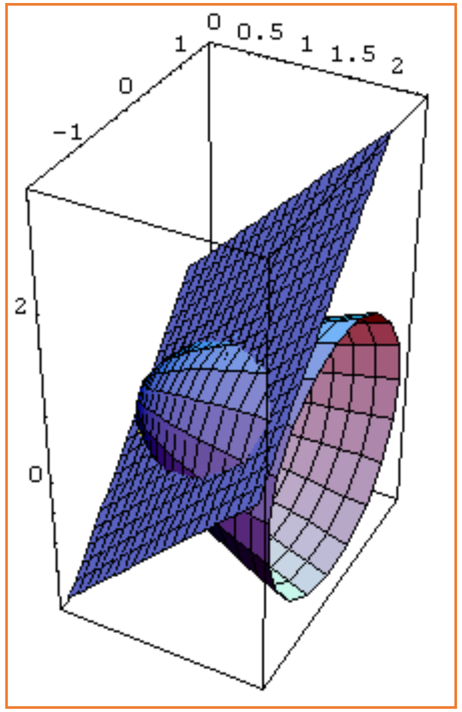
$$\begin{cases} z=\frac{1}{2}, \\ x=0 \end{cases} \qquad |y|\le\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

例 16 求抛物面 $y^2+z^2=x$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的截线在三个坐标面上的投影曲线方程.

解 截线方程为

$$\begin{cases} y^2+z^2=x \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$

如图,



（1）消去z得投影 $\begin{cases} x^2+5y^2+4xy-x=0 \\ z=0 \end{cases}$，

（2）消去y得投影 $\begin{cases} x^2+5z^2-2xz-4x=0 \\ y=0 \end{cases}$，

（3）消去x得投影 $\begin{cases} y^2+z^2+2y-z=0 \\ x=0 \end{cases}$.

学到了什么?

曲面

旋转曲面

空间曲线