# 6.2 正定二次型

主要内容： 正定二次型

# 正定二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

$$\forall\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0,\quad a_i \in \mathrm{R},$$

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0.$$

**定义** 如果任一非零实向量 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 都使 $f(X) = X^{\mathrm{T}}AX > 0$, 则称 $f(X)$ 为正定二次型， $f(X)$ 的矩阵 $A$ 称为正定矩阵.

正定矩阵 $A$ 首先是一个实对称矩阵.

$f(X) = X^{\mathrm{T}}AX$ 为正定二次型 $\Leftrightarrow$ $A$ 为正定矩阵.

例1　设$A$, $B$ 都是$n$ 阶正定矩阵. 证明：$kA + lB$ 也是正定矩阵 （$k>0$, $l>0$）.

证　$\because$ $A, B$ 都是$n$ 阶正定矩阵

$\therefore$ $\forall X \in \mathbf{R}^n, X \neq 0$, 有 $X^{\mathrm{T}}AX > 0, X^{\mathrm{T}}BX > 0$

$\therefore$ $X^{\mathrm{T}}(kA + lB)X = kX^{\mathrm{T}}AX + lX^{\mathrm{T}}BX > 0$

$\therefore$ $kA + lB$ 为正定矩阵.

例2 设$A=(a_{ij})n\times n$ 是正定矩阵. 证明：$a_{ii}>0(i=1,\ldots,n)$.

证 设某 $a_{ii}\le 0$,

取 $X=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}$

第 $i$ 个分量

则 $X^{\mathrm{T}}AX=a_{ii}\le 0$,

矛盾.

所以 $a_{ii}>0$, $(i=1,\ldots,n)$.

**定理1** $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$ 正定 $\Leftrightarrow$ $A$ 的特征值全大于零.

证 $f(X)=X^{T}AX \overset{X=PY}{=} \lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2=g(Y)$

$\Leftarrow$: $\forall X\in \mathbf{R}^n$, $X\neq 0$, 有 $Y=P^{-1}X\neq 0$,

$f(X)=g(Y)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2>0$

$\therefore$ $f(X)$是正定二次型.

$\Rightarrow$: 若 $A$正定且有某$\lambda_i\leq 0$, 不妨设$\lambda_1\leq 0$,

取 $Y=(1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$, 则 $X=PY\neq 0$,

$f(X)=g(Y)=\lambda_1 1+\lambda_2 0+\ldots+\lambda_n 0=\lambda_1\leq 0$

与$f(X)>0$ 矛盾，故 $\lambda_i>0$, $(i=1, \ldots, n)$

例3 设$A$是$n$ 阶正定矩阵，证明：$|A+I|>1.$

证 $\because$ $A$是正定矩阵

$\therefore$ $A$的特征值全为正实数：$\lambda_1$，$\lambda_2$，…，$\lambda_n$

$\therefore$存在正交矩阵C, 使

$$C^{-1}AC=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

$$\begin{aligned}|A+I| &= |C\Lambda C^{-1}+I| \\ &= |C\Lambda C^{-1}+CIC^{-1}| \\ &= |C(\Lambda+I)C^{-1}| \\ &= |C|\,|\Lambda+I|\,|C^{-1}| = |\Lambda+I| \\ &= (\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\ldots(\lambda_n+1)>1\end{aligned}$$

$f(X) = X^{\mathrm{T}}AX$ 可用正交变换 $X = PY$ 化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 $A$ 的特征值.

由此可得定理1 的

**推论** $n$ 元二次型 $f(X) = X^{\mathrm{T}}AX$ 正定 $\Leftrightarrow f(X)$ 的正惯性指数为 $n$.

合同变换不改变二次型的正负惯性指数，因此合同变换也不改变二次型的正定性.

**定理2** $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$ 正定 $\Leftrightarrow$ $A$ 与 $I$ 合同.

证 $\Rightarrow$: 设 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$ 正定, 则存在正交变换 $X=PY$ 使

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\ldots+\lambda_n y_n^2,\quad \lambda_i>0(i=1,\ldots,n)$$

令 $z_i=\sqrt{\lambda_i}y_i$, 即 $y_i=1/\sqrt{\lambda_i}z_i$,

即 $Y=\Lambda Z$, $\Lambda=\mathrm{diag}(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})$

$$X=PY=P\Lambda Z=QZ,\qquad (Q=P\Lambda)$$

则 $f(X)=z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2=Z^{\mathrm{T}}IZ.$

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=I.$$

所以, $A$ 与 $I$ 合同.

$\Leftarrow$: 设 $A$ 与 $I$ 合同，则存在可逆矩阵$P$, 使

$$P^{\mathrm{T}} A P = I.$$

令 $X = PY$，则

$$f(X)=X^{\mathrm{T}}AX=(PY)^{T}A(PY) = Y^{T}P^{T}APY = Y^{T}I\,Y.$$

$\forall X \neq 0$ 可得 $Y = Q^{-1}X \neq 0$

$$f(X) = X^{\mathrm{T}}AX = g(Y)$$
$$= y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

所以 $f(X)$是正定二次型.

例5 设$A$是正定矩阵，证明：$A^{-1}$是正定矩阵.

证 因 $A$ 是正定矩阵,

所以，存在可逆矩阵 $P$， 使 $P^{T}AP=I$.

$$(P^{T}AP)^{-1}=P^{-1}A^{-1}(P^{T})^{-1}$$

$$=P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{T}$$

$$=I$$

令 $Q=(P^{-1})^{T}$，则 $Q^{T}A^{-1}Q=I$.

所以， $A^{-1}$ 为正定矩阵.

**定理3** $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$ 正定 $\Leftrightarrow$ $A$ 的顺序主子式全大于零.

证 $\Rightarrow$: 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是正定矩阵.

则存在可逆矩阵 $P$, 使 $A=P^{\mathrm{T}}P$.

所以 $|A|=|P^{\mathrm{T}}P|=|P^{\mathrm{T}}||P|=|P|^2>0.$

设 $A_k=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$, $X_k=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}\neq 0$,

令 $X=(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$

则 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX=X_k^{\mathrm{T}}A_kX_k>0.$

由 $X_k^{T}A_kX_k > 0$ 可知 $A_k$ 为正定矩阵.

所以 $|A_k| = P_k > 0$ , $(k = 1, \dots, n)$.

定理3 的充分性这里不做证明.

例6 讨论下面二次型的正定性:

(1) $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$;

(2) $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$;

解 $f_1$ 中 $x_3^2$ 的系数 $a_{33} = -1 < 0$,

$f_2$ 中 $x_2^2$ 的系数 $a_{22} = 0$,

所以, $f_1, f_2$ 都不是正定二次型.

(3) $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$;

$f_3$ 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$P_1 = 1 > 0,\qquad P_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0,$

$P_3 = |A| = 2 > 0,$

所以 $f_3$ 是正定二次型.

**例7** $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2t\,x_1x_2 + 2\,x_1x_3$,
$t$ 为何值时，$f$ 为正定二次型？

**解**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

需

$$\begin{cases} P_1 = 1 > 0, \\ P_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2 > 0, \\ P_3 = |A| = 4 - 2t^2 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 2t^2 > 0 \\ 4 - t^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$$

所以，当 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$ 时 $f$ 为正定次型

$f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$ 为正定二次型 $\Leftrightarrow$ $A$ 为正定矩阵.

**定理4**　对于实对称矩阵 $A$，以下命题等价：

（1）$A$为正定矩阵；

（2）$A$的特征值全为正实数；

（3）$A$与单位矩阵合同；

（4）$A$的各阶顺序主子式全大于零.

例2 设实对称矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$是正定矩阵. $b_1, b_2, \ldots, b_n$是任意$n$个非零实数，证明: $B=(a_{ii}b_ib_j)_{n\times n}$为正定矩阵.

证

$$|B_k|=\begin{vmatrix} b_1^2a_{11} & b_1b_2a_{12} & \cdots & b_1b_ka_{1k} \\ b_2b_1a_{21} & b_2^2a_{22} & \cdots & b_2b_ka_{2k} \\ & \cdots & \cdots & \\ b_kb_1a_{k1} & b_kb_2a_{k2} & \cdots & b_k^2a_{kk} \end{vmatrix}=b_1^2b_2^2\cdots b_k^2\,|A_k|$$

正定矩阵$A$的$k$阶顺序主子式 $|A_k|>0$, $(k=1, \ldots, n)$.

所以， $|B_k|>0$, $(k=1, \ldots, n)$.

$B$为正定矩阵.

定义2 对于二次型 $f(X) = X^{\mathrm{T}}AX$及任一实向量$X$,
(1)如果$f(X) = X^{\mathrm{T}}AX < 0$, 则称$f(X)$为负定二次型；
(2)如果$f(X) = X^{\mathrm{T}}AX \geq 0$，则称$f(X)$为半正定二次型；
(3)如果$f(X) = X^{\mathrm{T}}AX \leq 0$，则称$f(X)$为半负定二次型；
(4)不是正定、半正定、负定、半负定的二次型称为不定二次型.

如：$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$ 是半正定二次型，

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$ 是不定二次型.

**定理4'** 对于二次型 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$，以下命题等价：

(1) $f(X)$ 为负定二次型；

(2) $A$ 的特征值全为负数；

(3) $f(X)$ 的负惯性指数为 $n$；

(4) $A$ 的顺序主子式满足：

$$(-1)^k P_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

**例9** 判定二次型的正定性：

$$f(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

**解**

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} P_1 = -5 < 0, \\ P_2 = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0, \\ P_3 = |A| = -80 < 0, \end{cases}$$

即 $(-1)^k P_k > 0 \quad (k = 1, 2, 3)$

$f$ 负定.

# 学到了什么?

正定二次型