

6.1 实二次型及其标准形

主要内容：二次型及其矩阵

合同变换

用配方法化二次型为标准形

用正交变换化二次型为标准形

一. 二次型及其矩阵

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad \text{其中: } a_{ij} = a_{ji}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ &+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ &+ \cdots \cdots \\ &+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为 n 元二次型.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

若 a_{ij} 为实数，则称为**实二次型**。

若 a_{ij} 为复数，则称为**复二次型**。

$$\text{设 } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, a_{ij} = a_{ji},$$

则 $f(x_1, \dots, x_n) = X^T A X$.

A : 二次型 $f(x_1, \dots, x_n)$ 的矩阵。

例1 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 3x_2x_3$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X^T AX$$

A: $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵

若令 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则有 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T BX$

但 $B^T \neq B$, 故 B 不是 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵

$$\text{二次型 } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

也记为 $f(X) = X^T A X$. ($A^T = A$)

二次型 $f(X)$ 的秩: A 的秩.

在例1中, $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}(A) = 3,$$

故 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的秩为 3.

二. 合同变换

1. 矩阵合同

定义 对 n 阶矩阵 A, B , 若存在可逆矩阵 C , 使

$$C^T A C = B,$$

则称 A 与 B 合同.

矩阵合同具有以下性质:

- (1) 反身性: 矩阵 A 与自身合同;
- (2) 对称性: 若 A 与 B 合同, 则 B 与 A 合同;
- (3) 传递性: 若 A 与 B 合同, 且 B 与 C 合同, 则 A 与 C 合同.

A 与 B 等价: $PAQ = B$, P, Q 可逆;

A 与 B 相似: $P^{-1}AP = B$, P 可逆;

请思考: 矩阵合同与等价、相似有何关系?

2. 合同变换

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots + c_{2n}y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \dots + c_{nn}y_n \end{cases} \quad (1)$$

(1)式称为从 y_1, \dots, y_n 到 x_1, \dots, x_n 的线性变换.

$$\text{令 } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

则(1)式可记为

$$X = CY \quad (2)$$

若 C 为可逆矩阵, 则(2)式称为可逆变换,

若 C 为正交矩阵, 则(2)式称为正交变换.

当 C 可逆时, (2)式又可记为

$$Y = C^{-1}X \quad (3)$$

对于二次型 $f(X) = X^TAX$, 若令 $X = CY$ (C 可逆), 则

$$f(X) = (CY)^T A (CY) = Y^T (C^T A C) Y.$$

记 $B = C^T A C$, 则 $B^T = B$, 且

$$f(X) = Y^T B Y = g(Y).$$

二次型 $f(X)$ 与 $g(Y)$ 的矩阵 A 与 B 合同.

也称二次型 $f(X)$ 与 $g(Y)$ 合同.

称 $X = CY$ (C 可逆) 为合同变换.

正交变换是一种特殊的可逆变换, 也是一种特殊的合同变换, 而合同变换就是可逆变换.

三. 用配方法化二次型为标准形

只含平方项的二次型

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \dots + d_r y_r^2 \quad (d_i \neq 0)$$

称为**标准形**.

形如

$$z_1^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_r^2$$

的二次型称为**规范形**.

p : **正惯性指数**;

$r - p$: **负正惯性指数**;

$|r - 2p|$: **符号差**.

例2 用配方法化二次型为标准形

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 2x_1x_3 \\ &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3) + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2) - 2x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 - 2x_3^2 \end{aligned}$$

$$\text{令} \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\text{则} \quad f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$$

用配方法化二次型为标准形

$$\text{令 } \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad (1) \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \quad (2)$$

(1): 从 x_1, x_2, x_3 到 y_1, y_2, y_3 的线性变换.

(2): 从 y_1, y_2, y_3 到 x_1, x_2, x_3 的线性变换.

(1)与(2)所表达的 x_1, x_2, x_3 与 y_1, y_2, y_3 的关系是相同的.

利用配方法与归纳法可以证明:

定理1 任一实二次型 $f(X) = X^TAX$ 都可用配方法化为标准形.

例3 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

$$\text{令} \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{则, } f(x_1, x_2, x_3) &= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3 \\ &= 2(y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2) - 2y_2^2 - 2y_3^2 + 8y_2y_3 \\ &= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2^2 - 4y_2y_3 + 4y_3^2) + 6y_3^2 \\ &= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2 \\ &= 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2 \end{aligned}$$

上式最后一步使用的变换是

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

若再令

$$\begin{cases} t_1 = \sqrt{2}z_1 \\ t_2 = \sqrt{6}z_3 \\ t_3 = \sqrt{2}z_2 \end{cases}$$

则,

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2 = t_1^2 + t_2^2 - t_3^2$$

定理2 任何一个实二次型的规范形都是惟一的.

证 将实二次型 $f(X) = X^TAX$ 经合同变换化为标准形后, 将正项集中在前, 负项集中在后:

$$d_1y_1^2 + \dots + d_p y_p^2 - d_{p+1}y_{p+1}^2 - \dots - d_r y_r^2$$

$$\text{令 } z_i = \sqrt{d_i}y_i \quad (i=1,2,\dots,r)$$

得 $f(X) = X^TAX$ 的规范形为

$$z_1^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_r^2$$

由于合同变换不改变二次型的秩, 所以 r 是唯一确定的. 在理论上还可进一步证明正惯性指数 p 是惟一的(此证明略), 因此, 负惯性指数 $r-p$ 与符号差 $|r-2p|$ 也是惟一的.

四. 用正交变换化二次型为标准形

定理3 任一 n 元实二次型 $f(X) = X^TAX$ 都可用正交变换 $X = CY$ 化为标准形

$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$
其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的特征值.

证 因 A 为 n 阶实对称矩阵,

所以存在正交矩阵 C (回顾5.4), 使

$$C^TAC = C^{-1}AC = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

令 $X = CY$, 则

$$f(X) = Y^T C^TAC Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

例4 用正交变换化二次型为标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

解 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda + 2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 7)$$

特征值: $\lambda_1 = 2$ (二重特征值), $\lambda_2 = -7$,

求 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量:

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$$

特征向量: $\alpha_1 = (-2, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (2, 0, 1)^T$

将 α_1, α_2 正交化:

$$\beta_1 = \alpha_1 = (-2, 1, 0)^T,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \dots = \frac{1}{5}(2, 4, 5)^T$$

求 $\lambda_1 = -7$ 的特征向量:

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 4 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3, \\ x_2 = x_3 \end{cases}, \quad \alpha_3 = (1, 2, 2)^T,$$

将 $\beta_1, \beta_2, \alpha_3$ 单位化:

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|} \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (-2, 1, 0)^T, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|} \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{45}} (2, 4, 5)^T$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\|\alpha_3\|} \alpha_3 = \frac{1}{3} (1, 2, -2)^T$$

$$\text{令 } C = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$X = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad Y = (y_1, y_2, y_3)^T$$

则 $X = CY$ 为正交变换, 且

$$f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 7y_3^2$$

二次型及其矩阵

合同变换

用配方法化二次型为标准形

用正交变换化二次型为标准形