5.4 实对称矩阵的相似对角化

主要内容：

- 共轭矩阵
- 实对称矩阵的特征值与特征向量
- 实对称矩阵的相似对角化
- 综合例题

一．共轭矩阵

设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$a_{ij}\in C$（$C$ 为复数集）.

$\overline{A}=\left(\overline{a_{ij}}\right)_{m\times n}$ 称为 A 的共轭矩阵.

共轭矩阵具有以下性质：

(1) $\overline{A^T}=\overline{A}^T$,

(2) $\overline{kA}=\overline{k}\,\overline{A}$,

(3) $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$.

二. 实对称矩阵的特征值与特征向量.

定理1 实对称矩阵的特征值都是实数.

证：设 $A \in R^{n\times n}, A^T = A$, $\quad A\alpha = \lambda\alpha$,

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \neq 0.$$

则 $\overline{A\alpha} = \overline{A}\,\overline{\alpha} = \overline{\lambda\alpha} = \overline{\lambda}\,\overline{\alpha}$,

$\therefore \quad \overline{\alpha}^T \overline{A}^T = \overline{\lambda}\,\overline{\alpha}^T$,

$$\overline{\alpha}^T A\alpha = \overline{\lambda}\,\overline{\alpha}^T\alpha,$$

$$\lambda\overline{\alpha}^T\alpha = \overline{\lambda}\,\overline{\alpha}^T\alpha,$$

$$(\lambda - \overline{\lambda})\overline{\alpha}^T\alpha = 0,$$

$\overline{\alpha}^T\alpha = \overline{a_1}\,a_1 + \overline{a_2}\,a_2 + \cdots + \overline{a_n}\,a_n \neq 0$, $\quad \therefore \quad \lambda = \overline{\lambda}$.

定理2 实对称矩阵不同特征值的特征向量相互正交.

证：设 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$， $A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，

$(\lambda_1\neq\lambda_2$， $\alpha_1\neq 0,\alpha_2\neq 0)$.

$$\lambda_1\alpha_1^T\alpha_2=(\lambda_1\alpha_1)^T\alpha_2=(A\alpha_1)^T\alpha_2=\alpha_1^T\lambda_2\alpha_2=\lambda_2\alpha_1^T\alpha_2,$$

$$\therefore\quad(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_1^T\alpha_2=0,$$

$$\because\quad\lambda_1-\lambda_2\neq 0,\quad\therefore\quad(\alpha_1,\alpha_2)=\alpha_1^T\alpha_2=0.$$

三. 实对称矩阵的相似对角化 .

定理3 对任一实对称矩阵A，都存在正交矩阵C,使

$$C^T AC = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中，λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n 是矩阵A的特征值 .

用数学归纳法可以证明定理3 .

推论 设A是实对称矩阵，λ是A的k重特征值，则λ所对应的线性无关特征向量的个数恰为 k .

求正交矩阵 C 与对角矩阵 Λ 的步骤：

(1) 求 $f(\lambda)=|\lambda I-A|$ 的根：$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；

(2) 求 $(\lambda_i I-A)X=0$ 的基础解系：

$$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir_i}\ ;$$

(3) 将 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir_i}$ 正交化后再单位化得：

$$\gamma_{i1},\gamma_{i2},\cdots,\gamma_{ir_i}\ ;$$

(4) 令 $C=(\gamma_{11}\cdots\gamma_{1r_1}\ \cdots\gamma_{k1}\cdots\gamma_{kr_k}),$

则 C 为正交矩阵且

$$C^TAC=C^{-1}AC=\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

例1 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

求正交矩阵 C 与对角矩阵 Λ，使

$$C^T AC = C^{-1}AC = \Lambda .$$

解 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-10)$

$\lambda_1 = 1$(二重)，$\lambda_2 = 10$.

求 $\lambda_1 = 1$的特征向量：

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -2x_2 + 2x_3 \text{ ,}$$

$$\alpha_1 = (-2, 1, 0)^T, \quad \alpha_2 = (2, 0, 1)^T .$$

将 α_1, α_2 正交化：$\beta_1 = \alpha_1 = (-2, 1, 0)^T$,

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = (2, 0, 1)^T - \frac{-4}{5}(-2, 1, 0)^T$$

$$= \frac{1}{5}(2, 4, 5)^T .$$

再将 β_1, β_2 单位化：

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^T, \qquad \gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}(2, 4, 5)^T.$$

求 $\lambda_2 = 10$ 的特征向量：

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_3, \quad x_2 = -x_3, \qquad \alpha_3 = (1, 2, -2)^T.$$

将 α_3 单位化：$\gamma_3 = \frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, -2)^T.$

令 $C=(\gamma_1\ \ \gamma_2\ \ \gamma_3)=\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3\sqrt{5}} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{4}{3\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{5}{3\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$，

则 C 为正交矩阵且：

$$C^TAC=C^{-1}AC=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}.$$

例2　求 a, b 的值与正交矩阵 C，使

$C^{-1}AC=\Lambda$ 为对角矩阵，

$$A=\begin{pmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 4\end{pmatrix}.$$

解　$\because\quad A\sim\Lambda$，

$$\therefore\quad |\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -b & -1\\ -b & \lambda-a & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-(a+2)\lambda^2+(2a-b^2-1)\lambda+b^2-2b+1$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - (a+2)\lambda^2 + (2a - b^2 - 1)\lambda + b^2 - 2b + 1$$

$$= |\lambda I - \Lambda| = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda,$$

$$\begin{cases} a+2=5 \\ b^2 - 2b + 1 = 0, \end{cases} \quad a = 3, \quad b = 1.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4.$$

求$\lambda_1 = 0$的特征向量：

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = (1, 0, -1)^T,$$

同样可得 $\lambda_2=1$ 的特征向量为： $\alpha_2=(1,-1,1)^T$

$\lambda_3=4$ 的特征向量为： $\alpha_3=(1,2,1)^T$.

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化：

$$\gamma_1=\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T,$$

$$\gamma_2=\frac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,$$

$$\gamma_3=\frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T.$$

令 $C=(\gamma_1\ \ \gamma_2\ \ \gamma_3)$，则 C 为正交矩阵且

$$C^{-1}AC=diag(0,\ 1,\ 4).$$

例3　实对称矩阵 A 与 B 相似

$\Leftrightarrow$ A与B有相同的特征值．

证　$\Rightarrow$：相似矩阵有相同的特征值．

$\Leftarrow$：设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是A与B的特征值，则

$$A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\sim B,$$

由矩阵相似的传递性可得：

$$A\sim B.$$

例1 设 n 阶矩阵 A 的任何一行元素的和都是 a，求 A 的一个特征值与特征向量 .

解：设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则 $a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}=a$

取 $\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$，则

$$A\alpha=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n} \\ a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\therefore$ $\lambda=a$ 是 A的一个特征值，

$\alpha=(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)^T$ 是 A 的一个特征向量．

例2 设 $\lambda_1=12$ 是矩阵 A 的特征值，

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & a & 4 \end{pmatrix}$$

求 A 的其余特征值.

解 $$|\lambda_1 I-A|=|12I-A|=\begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & -a & 8 \end{vmatrix}$$

$$=9a+36=0 \Rightarrow a=-4.$$

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}=7+7+4=18,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=\begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{vmatrix}=108,$$

将 $\lambda_1=12$ 代入

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=18 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=108 \end{cases},$$

得 $\lambda_2=\lambda_3=3$.

例3 设 A 是 3 阶矩阵且 $I+A, 3I-A, I-3A$ 均不可逆. 证明:

(1) A可逆, (2) A与对角矩阵相似 .

证 (1) $\because$ $I+A$不可逆, $\therefore$ $|I+A|=0$,

$$\therefore (-1)^3|-I-A|=0 \Rightarrow |-I-A|=0,$$

$\therefore$ $\lambda_1=-1$是A特征值.

由 $|3I-A|=0 \Rightarrow$

$$|I-3A|=3^3\left|\frac{1}{3}I-A\right|=0 \Rightarrow \left|\frac{1}{3}I-A\right|=0,$$

$\therefore$ $\lambda_3=\dfrac{1}{3}$是A的特征值.

A的特征值均不为零，故A可逆 .

(2) $\because$ A的特征值都是单特征值，

$$\therefore \quad A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 3 & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

例4 设 A 是 3 阶矩阵，A^{-1} 的特征值是 1，2，3，求 A^* 的特征值.

解：$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$，

设 $A^{-1}\alpha=\lambda\alpha=\dfrac{1}{|A|}A^*\alpha$，则 $A^*\alpha=\lambda|A|\alpha$，$(\alpha\neq 0)$，

$\because$ A^{-1} 的特征值是：1, 2, 3,

$\therefore$ 存在可逆矩阵 P，使

$$P^{-1}A^{-1}P=diag(1,2,3)$$

$$|P^{-1}||A^{-1}||P|=6\Rightarrow|A^{-1}|=6\Rightarrow|A|=\frac{1}{6},$$

$\therefore$ A^* 的特征值是：$\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}$.

例5 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}\sim\Lambda \text{为对角矩阵，}$$

求 x 与 y 应满足的条件．

解：$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-x&\lambda-1&-y\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

$$\lambda_1=1(\text{二重}),\quad \lambda_2=-1.$$

$A\sim$对角矩阵$\Lambda \Leftrightarrow \lambda_1$ 有两个线性无关的特征向量，

$$\Leftrightarrow R(\lambda_1 I-A)=1.$$

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -x-y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(\lambda_1 I - A) = 1 \Leftrightarrow -x - y = 0$，

即

$$x + y = 0.$$

例6 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值是 1，2，3，A 对应于特征值 1, 2 的特征向量分别是：

$$\alpha_1=(-1,-1,1)^T,\quad \alpha_2=(1,-2,-1)^T.$$

求 (1) A 对应于特征值 3 的特征向量，

(2) 求矩阵 A.

解：(1) 设 A 对应于 3 的特征向量是：

$$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T,\ \text{则}$$

$$(\alpha_1,\alpha_3)=-x_1-x_2+x_3=0$$

$$(\alpha_2,\alpha_3)=x_1-2x_2-x_3=0,$$

$$\alpha_3=(1,0,1)^T.$$

$$设\ P=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},则$$

$$P^{-1}AP=\Lambda=diag(1,2,3),\qquad A=P\Lambda P^{-1}.$$

$$P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ -3 & 0 & 3\end{pmatrix},$$

$$A=P\Lambda P^{-1}=\cdots=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13 & -2 & 5\\ -2 & 10 & 2\\ 5 & 2 & 13\end{pmatrix}.$$

学到了什么?

共轭矩阵

实对称矩阵的特征值与特征向量

实对称矩阵的相似对角化