5.3 n维向量空间的正交化

主要内容：

- 内积
- 标准正交基
- 施密特正交化方法
- 正交矩阵

一．内积

1. 定义： 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

称为 α 与 β 的内积．

2. 性质:

(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

(2) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

$(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;

(3) $(\alpha,\alpha)\geq 0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时等号成立．

内积还满足以下关系：

$$(\alpha, l\beta) = l(\alpha, \beta), \quad l \in R;$$

$$(\alpha, \beta+\gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma).$$

3. 长度

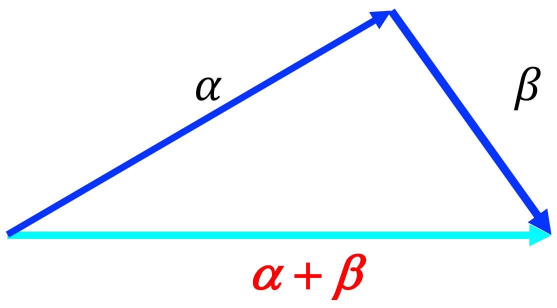
(1) 定义 $\|\alpha\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$

(2) 性质

1^o 非负性 $\|\alpha\| \geq 0$;

2^o 齐次性 $\|k\alpha\| = |k|\|\alpha\|$;

3^o 三角不等式 $\|\alpha+\beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$.



(3) 单位向量

$\|\alpha\|=1$： α为单位向量 .

设 $\alpha\neq 0$， 令 $\alpha_e=\dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha$, 则

$$\|\alpha_e\|=\sqrt{(\alpha_e,\alpha_e)}=\sqrt{\frac{1}{\|\alpha\|^2}(\alpha,\alpha)}=1 .$$

4. 夹角

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$$ ： α 与 β 的夹角.

问题： $\left|\dfrac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}\right|\leq 1$?

柯西不等式 $|(\alpha,\beta)| \le \|\alpha\|\|\beta\|$,

当且仅当$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$线性相关时等号成立.

证 (1) α,β线性无关：$\forall t\in R$，$t\alpha+\beta\ne 0$,

$$(t\alpha+\beta, t\alpha+\beta)=t^2(\alpha,\alpha)+2t(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)>0,$$

$$\therefore\quad [2(\alpha,\beta)]^2-4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)<0,$$

$$(\alpha,\beta)^2<\|\alpha\|^2\|\beta\|^2,\qquad |(\alpha,\beta)|<\|\alpha\|\|\beta\|.$$

(2) α,β线性相关：设 $\beta=k\alpha$，则

$$(\alpha,\beta)^2=(\alpha,k\alpha)^2=k^2(\alpha,\alpha)^2=(\alpha,\alpha)(k\alpha,k\alpha)=\|\alpha\|^2\|\beta\|^2,$$

$$|(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})|=\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

二. 规范正交基

1. 正交向量组

α 与 β 正交：$(\alpha,\beta)=0$.

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为正交向量组：

两两正交且不含零向量 .

如：$\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(-1,2,-1),\alpha_3=(-1,0,1)$

$$(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_3)=(\alpha_2,\alpha_3)=0$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为正交向量组 .

例1 设 A 是 n 阶反对称矩阵，x 是 n 维列向量，且 $Ax=y$，证明：x 与 y 正交．

证：$(x, y) = x^T y = x^T Ax$

$$(y, x) = y^T x = (Ax)^T x = x^T A^T x = -x^T Ax\,,$$

由 $(x, y) = (y, x)$ 可知：

$$(x, y) = 0\,.$$

定理1 正交向量组线性无关.

证 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为正交向量组,且

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

则 $(\alpha_1, k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)$

$$=k_1(\alpha_1,\alpha_1)+k_2(\alpha_1,\alpha_2)+\cdots+k_s(\alpha_1,\alpha_s)$$

$$=k_1(\alpha_1,\alpha_1)=0,$$

$\because\ (\alpha_1,\alpha_1)>0$, $\therefore\ k_1=0$,

同理:$k_2=k_3=\cdots=k_s=0$,

$\therefore\ \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关.

线性无关向量组未必是正交向量组 .

如：$\alpha_1=(1,0,0), \alpha_2=(1,1,0), \alpha_3=(1,1,1)$

例2 $\alpha_1=(1,1,1), \quad \alpha_2=(1,-2,1),$

求 α_3, 使 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为正交向量组.

解 设 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)$, 则

$$(\alpha_1,\alpha_3)=x_1+x_2+x_3=0$$
$$(\alpha_2,\alpha_3)=x_1-2x_2+x_3=0$$

$\alpha_3=(1,\ 0,\ -1)$.

2. 规范正交向量组

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 满足：

(1) $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$，$(i \neq j, \alpha_i \neq 0, \alpha_j \neq 0)$

(2) $\|\alpha_i\| = 1, (i = 1, 2, \cdots, s)$

则称 α_1， α_2， $\cdots$， α_s 为规范(标准)正交向量组．

如 $\varepsilon_1 = (1, 0, \cdots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \varepsilon_n = (0, 0, \cdots, 1)$

是 R^n 的规范正交基．

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \alpha_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \alpha_3 = (0, 1, 0)$$

是 R^3 的规范正交基．

三. 施密特正交化方法

任一线性无关向量组都可规范正交化 .

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，确定与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价的正交向量组 β_1,β_2,β_3 .

令 $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_2+k\beta_1$ ，选择适当的 k，使 $(\beta_1,\beta_2)=0$，即

$$(\alpha_2+k\beta_1,\beta_1)=(\alpha_2,\beta_1)+k(\beta_1,\beta_1)=0,$$

$$k=-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)},\quad \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 .$$

令 $\beta_3=\alpha_3+k_1\beta_1+k_2\beta_2$，为使

$(\beta_1,\beta_3)=(\beta_2,\beta_3)=0$，则可推出

$$k_1=-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)},\quad k_2=-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)},$$

于是

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2,$$

$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 等价的正交向量组 .

把线性无关向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 规范正交化

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$\beta_s=\alpha_s-\frac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_s,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_s,\beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\beta_{s-1})}\beta_{s-1}.$$

再令 $\gamma_i=\dfrac{1}{\|\beta_i\|}\beta_i\quad(i=1,2,\cdots,s)$, $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 为规范正交向量组 .

例3 设 $\alpha_1=(1,1,1,)$, 求 α_2,α_3, 使 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为正交向量组.

解 设与 α_1 正交的向量为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)$, 则

$$(\alpha_1,\alpha)=x_1+x_2+x_3=0$$

其基础解系为

$$X_1=(1,0,-1),\quad X_2=(0,1,-1)$$

将 X_1,X_2 正交化:

$$\alpha_2=X_1=(1,0,-1),$$

$$\alpha_3=X_2-\frac{(X_2,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\alpha_2=(0,1,-1)-\frac{1}{2}(1,0,-1)$$

$$=\frac{1}{2}(-1,2,-1).$$

例4 将 $\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)$, $\alpha_2=(1,\ 2,\ 1)$, $\alpha_3=(0,\ -1,\ 1)$ 规范正交化．

解 设 $\beta_1=\alpha_1=(1,1,1)$,

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,2,1)-\frac{4}{3}(1,1,1)$$

$$=\frac{1}{3}(-1,2,-1),$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$=\cdots=\frac{1}{2}(-1,0,1),$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1).$$

注意： 将 $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{k}\boldsymbol{\alpha}$ 单位化， 只需将 $\boldsymbol{\alpha}$ 单位化即可.

为什么 ？

$$\gamma = \frac{1}{\|\beta\|}\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{k}\alpha, \frac{1}{k}\alpha\right)}}\frac{1}{k}\alpha = \frac{|k|}{\|\alpha\|}\frac{1}{k}\alpha = \pm\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha.$$

四. 正交矩阵

将例4中的$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$作矩阵$A$的列向量组：

$$A=(\gamma_1\quad\gamma_2\quad\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$AA^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=I$$

1. **定义** 若实矩阵 A 满足 $AA^T=A^TA=I$ ，则称 A 正交矩阵 .

2. **性质** (1) $A^{-1}=A^T$,

(2) $|A|=\pm 1$,

$$|A^T A|=|A^T||A|=|A|^2=|I|=1.$$

(3) 正交矩阵的乘积也是正交矩阵.

设 $A^T A=AA^T=I \quad B^T B=BB^T=I$,则

$$(AB)^T(AB)=B^T A^T AB=B^T B=I.$$

(4) A 为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A 的行(列)向量组都是规范正交向量组 .

证 设 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ $A^T=\begin{pmatrix}\alpha_1{}^T & \alpha_2{}^T & \cdots & \alpha_n{}^T\end{pmatrix}$, 则

$$AA^T=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_1{}^T & \alpha_1\alpha_2{}^T & \cdots & \alpha_1\alpha_n{}^T\\ \alpha_2\alpha_1{}^T & \alpha_2\alpha_2{}^T & \cdots & \alpha_2\alpha_n{}^T\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_n\alpha_1{}^T & \alpha_n\alpha_2{}^T & \cdots & \alpha_n\alpha_n{}^T\end{pmatrix}=I$$

$\Leftrightarrow \alpha_i\alpha_i{}^T=1,\ \ \alpha_i\alpha_j{}^T=0\,(i\neq j).\ \ \Leftrightarrow(\alpha_i,\alpha_i)=1,\ \ (\alpha_i,\alpha_j)=0\,(i\neq j).$

例5 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都是3维实列向量， 且

$$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$$ 为正交矩阵，

$$\beta_1=\frac{1}{3}(2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3),$$

$$\beta_2=\frac{1}{3}(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3),$$

$$\beta_3=\frac{1}{3}(\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3),$$

证明：$B=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$ 是正交矩阵 .

分析：只需证明

$$(\beta_i,\beta_j)=0\,(i\neq j),\quad \|\beta_i\|=1,(i=1,2,3).$$

证 $\because$ $A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$为正交矩阵，

$\therefore$ $(\alpha_i,\alpha_j)=0\ (i\neq j)$, $(\alpha_i,\alpha_i)=1\ (i=1,2,3)$.

$$(\beta_1,\beta_2)=\left(\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_3,\ \frac{2}{3}\alpha_1-\frac{1}{3}\alpha_2+\frac{2}{3}\alpha_3\right)$$

$$=\frac{4}{9}(\alpha_1,\alpha_1)-\frac{2}{9}(\alpha_2,\alpha_2)-\frac{2}{9}(\alpha_3,\alpha_3)=0,$$

同样，$(\beta_1,\beta_3)=(\beta_2,\beta_3)=0$.

$$\|\beta_1\|=\sqrt{(\beta_1,\beta_1)}$$

$$=\sqrt{\frac{4}{9}(\alpha_1,\alpha_1)+\frac{4}{9}(\alpha_2,\alpha_2)+\frac{1}{9}(\alpha_3,\alpha_3)}=1,$$ 同样，$\|\beta_2\|=\|\beta_3\|=1$.

例6 设 A 是奇数阶正交矩阵且 $\det A=1$.

证明： 1 是 A 的特征值 .

分析：(1) 是否存在向量 α，使 $A\alpha=1\alpha$?

(2) $|1I-A|=0$?

证：$|1I-A|=|AA^T-A|=|A||A^T-I|=|(A-I)^T|$

$=|A-I|=(-1)^n|I-A|=-|1I-A|$

$\therefore\ |1I-A|=0$.

学到了什么?

- 内积
- 标准正交基
- 施密特正交化方法
- 正交矩阵