5.1 基本概念与计算

主要内容：

- 特征值与特征向量的定义
- 特征值与特征向量的性质
- 特征值与特征向量的计算
- 思考题

一. 特征值与特征向量的定义

例 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix},\ \alpha=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

$$A\alpha=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=2\alpha,\quad A\beta=\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=4\beta,$$

$$A\gamma=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\neq k\gamma.$$

定义 设 $A \in P^{n\times n}$, $\alpha \in P^n$, $\lambda \in P$. 若 $A\alpha = \lambda\alpha$ （$\alpha \neq 0$），

则称 λ 为 A 的一个特征值，

α 为 A 对应于 λ 的一个特征向量 .

二. 特征值与特征向量的性质

1. 设 $A\alpha = \lambda\alpha\ (\alpha \neq 0)$, 则

$$A(k\alpha) = k(A\alpha) = k(\lambda\alpha) = \lambda(k\alpha).$$

2. 设 $A\alpha_i = \lambda\alpha_i\ (i = 1, 2, \cdots, s)$, 则

$$A(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s)$$
$$= \lambda(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s).$$

特征值与特征向量的性质

特征子空间

设 $V_\lambda = \{\alpha \mid A\alpha = \lambda\alpha,\ \alpha \in R^n\}$

则由特征值与特征向量的性质可知：

$$\forall\, \alpha, \beta \in V_\lambda,\quad \alpha + \beta \in V_\lambda$$

$$\forall\, \alpha \in V_\lambda, k \in R,\quad k\alpha \in V_\lambda\ .$$

故 V_λ 是 n 维向量空间 R^n 的子空间 .

V_λ 称为矩阵 A 的特征子空间 .

思考： V_λ 的所有向量都是 A 的特征向量吗 ？

三. 特征值与特征向量的计算

设 $A\alpha=\lambda\alpha\ (\alpha\neq 0)$. 则 $(\lambda I-A)\alpha=0$.

α 是 $(\lambda I-A)X=0$ 的非零解.

求A的特征值与特征向量的步骤:

(1) 求 $|\lambda I-A|=0$ 的根: $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$;

(2)求 $(\lambda_i I-A)X=0$ 的基础解系:

$$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{r_i}},$$

则A对应于λ_i的特征向量为:

$$k_1\alpha_{i_1}+k_2\alpha_{i_2}+\cdots+k_{r_i}\alpha_{r_i}$$

$(k_1,k_2,\cdots,k_{r_i}$ 不全为零$)$.

特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|.$$

$f(\lambda)$称为矩阵A的特征多项式.

设 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda+2)^2(\lambda+\sqrt{5})^3$,

$\lambda=1$: A的单特征根,

$\lambda=-2$: A的二重特征根,

$\lambda=-\sqrt{5}$: A的三重特征根.

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|$$

$$=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|.$$

设 A 的特征值是：$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$$=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\therefore \quad \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|.$$

A可逆的充要条件是 $\lambda_i\neq 0\ (i=1,\ 2,\cdots,n)$.

例1 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ -2 & 4 & -2\end{pmatrix}$,求$A$的特征值与特征向量.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 4 & -2\\ 2 & \lambda+6 & -4\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 4\\ 2 & \lambda+6\end{vmatrix}$$

$$=\cdots=(\lambda-2)^2(\lambda+7)$$

$\lambda_1=2$ (二重）， $\lambda_2=-7.$

求 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量， $(\lambda_1 I - A)X = 0$ 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -x_2 + x_3$$

基础解系为：$\alpha_1 = (-2 \quad 1 \quad 0)$，$\alpha_2 = (2 \quad 0 \quad 1)$.

特征向量为：$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ (k_1, k_2 不全为零).

求$\lambda_2=7$的特征向量.

$$\lambda_2 I-A=\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -5\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3\\ x_2=-x_3\end{cases},$$

$$\alpha_3=(1,2,-2),$$

特征向量为 $k_3\alpha_3\ (k_3\neq 0)$.

例2 求矩阵A的特征值与特征向量

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

解 $$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=1$(二重).

求$\lambda_1 = 2$的特征向量，

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

$$\alpha_1 = (0, 0, 1)^T,$$

特征向量为$k_1\alpha_1 \ (k_1 \neq 0)$.

求 $\lambda_2=1$ 的特征向量：

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

$$\alpha_2 = (1,2,-1)^T,$$

特征向量为 $k_2\alpha_2\ (k_2 \neq 0)$.

特征值的重数与其对应的线性无关特征向量个数的关系

设 λ_0 是矩阵 A 的 k 重特征值，则 λ_0 所对应的线性无关特征向量的个 数不超过 k.

即，齐次方程组 $(\lambda_0 I - A)X = 0$ 的基础解系所含解向量个 数不超过 k.

例3　设

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a \end{pmatrix}$$

求A的特征值与特征向量

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -a & \cdots & -a \\ -a & \lambda-a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & \lambda-a \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-na & \lambda-na & \cdots & \lambda-na \\ -a & \lambda-a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & \lambda-a \end{vmatrix} = (\lambda-na)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a & \lambda-a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & \lambda-a \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-na)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} \qquad = \lambda^{n-1}(\lambda-na)$$

$$\lambda_1=0\ (n-1重),\quad \lambda_2=na\ .$$

$$\lambda_1E-A=\begin{pmatrix}-a & -a & \cdots & -a\\ -a & -a & \cdots & -a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a & -a & \cdots & -a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$$

$$\alpha_1=(1,-1,0,\cdots,0)^T,$$

$$\alpha_2=(1,0,-1,\cdots,0)^T,$$

$$\alpha_{n-1}=(1,0,0,\cdots,-1)^T.$$

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_{n-1}\alpha_{n-1}\ (k_i不全为零)$$

$$(\lambda_2 E - A)X = \begin{pmatrix} (n-1)a & -a & \cdots & -a \\ -a & (n-1)a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & (n-1)a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha_n = (1, 1, \cdots, 1)^T. \quad k_n\alpha_n \ (k_n \neq 0).$$

例4 设 $A^2 = A$，证明：A 的特征值为 0 或 1 .

证：设 $A\alpha = \lambda\alpha \quad (\alpha \neq 0)$

则 $A^2\alpha = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda(A\alpha) = \lambda^2\alpha$

$\therefore \ \lambda^2\alpha = \lambda\alpha, \quad (\lambda^2 - \lambda)\alpha = 0$

$\therefore \ \lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$.

例5 设矩阵 A 可逆且 $A\alpha = \lambda\alpha\ (\alpha \neq 0)$,
求 A^{-1} 与 A^* 的特征值与特征向量 .

解 $A^{-1}(A\alpha) = A^{-1}(\lambda\alpha) = \lambda(A^{-1}\alpha) = (A^{-1}A)\alpha = \alpha$

若 $\lambda = 0$，则 $A\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, 矛盾.

$\therefore\ \lambda \neq 0,\ A^{-1}\alpha = \dfrac{1}{\lambda}\alpha$.

又 $AA^* = |A|I \quad A^* = |A|A^{-1}$,

$\therefore\ A^*\alpha = |A|A^{-1}\alpha = \dfrac{|A|}{\lambda}\alpha$.

例6 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，$\boldsymbol{f(x)}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的多项式，证明: $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{f(A)}$ 的特征向量 .

分析： $f(x)=a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0$

$$f(A)=a_n A^n+\cdots+a_1 A+a_0 I$$

$$A\alpha=\lambda\alpha \quad (\alpha\neq 0)$$

$$f(A)\alpha=?\,\alpha$$

$$f(A)\alpha=a_n A^n\alpha+\cdots+a_1 A\alpha+a_0\alpha$$

$$A^n\alpha=?$$

证：设 $A\alpha=\lambda\alpha\ (\alpha\neq 0)$

则 $A^2\alpha=A(A\alpha)=A(\lambda\alpha)=\lambda(A\alpha)=\lambda^2\alpha$

$\therefore\ A^n\alpha=\lambda^n\alpha$,

$$
\begin{aligned}
f(A)\alpha &= a_nA^n\alpha+\cdots+a_1A\alpha+a_0\alpha\\
&= a_n\lambda^n\alpha+\cdots+a_1\lambda\alpha+a_0\alpha\\
&= \left(a_n\lambda^n+\cdots a_1\lambda+a_0\right)\alpha\\
&= f(\lambda)\alpha
\end{aligned}
$$

思考：设$\boldsymbol{\lambda_0=2}$是矩阵$\boldsymbol{A}$的一个特征值，确定$\boldsymbol{A^3-3A^2+2I-4A^{-1}}$的一个特征值.

例7 设A是奇数阶实矩阵，且 $A^T A = I$，$|A| = -1$，

证明：$\lambda = -1$ 是A 的特征值 .

分析： $A\alpha = -\alpha$ ？ $|-I - A| = 0$ ？

证： $|-I - A| = |-A^T A - A|$

$$= |-A^T - I||A|$$

$$= -|-I - A|$$

$\therefore \quad |-I - A| = 0 .$

思考题 ：

1. 是否任一数 $\boldsymbol{\lambda_0}$ 都是某个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 特征值 ？

是 .比如，

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}.$$

2. 是否任一列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都是某个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量 ？

若 $\alpha \neq 0$，则是.比如，$I\alpha = 1\alpha$.

3. 怎样判断数 λ_0 是否矩阵 A的特征值 ？

(1) 是否存在非零向量 α 使 $A\alpha = \lambda_0\alpha$.

(2) $|\lambda_0 I - A| = 0$ ？

例 设

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$ 求 A^{-1} 与 $I + A^{-1}$ 的特征值.

解 $|\lambda I - A| = \cdots = (\lambda+5)(\lambda-1)^2$,

$\lambda_1 = -5$ ， $\lambda_2 = 1$ (二重).

A^{-1}的特征值为：$\mu_1=-\frac{1}{5}$，$\mu_2=1$(二重)

设 $A^{-1}\alpha=\mu_1\alpha=-\frac{1}{5}\alpha$，则

$$(I+A^{-1})\alpha=\alpha+\mu_1\alpha=(1+\mu_1)\alpha=\frac{4}{5}\alpha.$$

$\therefore$ $I+A^{-1}$的一个特征值是：$\frac{4}{5}$.

又 $\left|-\frac{1}{5}I-A^{-1}\right|=0$， $\therefore$ $\left|\frac{4}{5}I-(I+A^{-1})\right|=0$，

$\frac{4}{5}$是$I+A^{-1}$的一个特征值.

同样可得$I+A^{-1}$的另一个特征值：2(二重).

学到了什么？

特征值与特征向量的定义

特征值与特征向量的性质

特征值与特征向量的计算