4.4 线性方程组解的结构

主要内容：

齐次线性方程组

非齐次线性方程组

一. 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

即 $AX = 0$

平凡解：$X = 0$(零解)

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, 则下列命题等价：

1^o $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性相关;

2^o $AX = 0$有非零解;

3^0 $R(A) < n$.

- **解的性质：**

$AX=0$ 的解向量的线性组合仍为$AX=0$的解.

证　设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 为$AX=0$ 的解向量，则

$$A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s)$$
$$=A(k_1\alpha_1)+A(k_2\alpha_2)+\ldots+A(k_s\alpha_s)$$
$$=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\ldots+k_sA\alpha_s$$
$$=k_1 0+k_2 0+\ldots+k_s 0=0.$$

所以，$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s$ 仍为$AX=0$的解.

$W=\{X\in \mathbf{R}^n \mid AX=0\}$ 为$\mathbf{R}^n$的子空间

$AX=0$的**基础解系：** W 的一组基.

1^o 若$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$线性无关;

2^o $AX=0$的任一解向量均可由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$线性表出

3^o **定理1** 设$R(A)=r<n$，则$AX=0$有基解系且所含向量个数为$n-r$，即$\dim W=n-r$，这里n为方程组未知数个数.

证　$\mathrm{R}(A)=r$, 不妨设A的前r个列向量线性无关, 则

$$A \xrightarrow{\text{行初等变换}} B=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-1} \\ & & & O & & \end{pmatrix}$$

得$AX=0$的同解方程组 $\begin{cases} x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n \end{cases}$

分别取 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$ 则依次得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix},$$

便得$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的$\boldsymbol{n-r}$个解：

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

可证明：$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 即为基础解系：

(1) 证明 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 线性无关：

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \text{线性无关}$$

$\Rightarrow$ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 线性无关

(2) 可以证明$AX=0$的任一解都可由 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 线性表出.

（略,思考）

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$为$AX = 0$的一个基解系，则
$\forall$ $AX = 0$的解α，

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_{n-r}\alpha_{n-r}, \quad k_1, k_2, \ldots, k_{n-r} \in \mathbf{R}.$$

$AX = 0$ 的**通解**

$AX = 0$的基解系一般不惟一，但其任一基解系中所含向量个数必为

n (未知数个数) - R(A).

若$AX = 0$有非零解，则必有无穷多个解.

例1 求方程组的通解 $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+x_4=0 \\ 2x_1+4x_2+8x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+6x_2+2x_3 \qquad =0 \end{cases}$

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(A)=2<n=4,\ \ n-R(A)=2,$$

为求通解，可进一步化为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_3 = -\frac{3}{10}x_4 \end{cases}$ **(x_2, x_4为自由未知量)**

基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$$

方程组通解为

$$X = k_1\xi_1 + k_2\xi_2, \ \ k_1, k_2 \in R.$$

例2 解 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+6x_2+10x_3=0 \\ 2x_1+5x_2+7x_3=0 \\ x_1+2x_2+4x_3=0 \end{cases}$

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

r(*A*) =3 $=n$, 只有零解 $\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$

例3 解 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0 \\ x_1+4x_2+4x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+4x_2+6x_3+4x_4=0 \\ -x_1-2x_2-3x_3+4x_4=0 \end{cases}$

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得同解方程组
$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$
(x_3为自由未知量)

基础解系为
$$\xi = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

方程组通解为
$$X = k\xi,\ k \in R.$$

例4 证明：与$AX=0$基础解系等价的线性无关的向量组也是该方程组的基础解系.

证： 两个等价的线性无关的向量组所含向量个数相等.

设$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$是$AX=0$基础解系， $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$与之等价.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$可由$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$线性表出，所以是$AX=0$的解;

$AX=0$的任一解X可由$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$线性表出，

又$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性表出，所以$X$可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性表出;

故， $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 是$AX=0$的基础解系.

例5 设n阶矩阵A, B满足$AB=0$, 证明：

$$R(A)+R(B)\le n.$$

证 设 $B=(b_1, \ldots, b_n)$, 则

$$AB=A(b_1, \ldots, b_n)=(A b_1, \ldots, Ab_n)=0,$$

$$A b_i=0, \qquad i=1, \ldots, n.$$

b_i ($i=1, \ldots, n$)为$AX=0$的解，所以可由基础解系ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$($r=R(A)$)线性表出.

所以, 秩(B) =秩 $(b_1, \ldots, b_n)$ ≤秩$(\xi_2, \ldots, \xi_{n-r})$= n-r(A).

即 $R(A)+R(B)\le n.$

二. 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

即 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$

($\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$称为$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$的导出组)

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, 即

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n = b,$$

$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 有解

$\Leftrightarrow$ b可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性表出

$\Leftrightarrow$ $R(\overline{A}) = R(A)$

解的性质：

性质1 设$\eta_1,\ \eta_2$为$AX=b$的解, 则$\eta_1-\eta_2$为其导出组的解.

证 $A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=b-b=0$

所以， $\eta_1-\eta_2$为$AX=0$的解.

性质2 设η为$AX=b$的解, ξ为$AX=0$的解， 则$\eta+\xi$为$AX=b$的解.

证 $A(\eta+\xi)=A\eta+A\xi=b+0=b$

所以， $\eta+\xi$为$AX=b$的解.

$AX=b$ 的**特解**：$AX=b$ 的任一解.

性质3 设η_0为$AX=b$的一个特解, 则$AX=b$的任一解η可表为

$\eta=\eta_0+\xi$, (ξ为$AX=0$的一个解)

对于$AX=b$的任一个特解η_0, 当ξ取遍它的导出组的全部解时，$\eta=\eta_0+\xi$就给出$AX=b$的全部解.

性质3的证明

$$\eta=\eta_0+\underbrace{(\eta-\eta_0)}$$

为$AX=0$的解，设为ξ

为了求$AX=b$ 的通解（全部解），只需求其一个特解 η_0, 以及导出组的全部解即可：

设η_0为$AX=b$ 的一个特解， $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$为其导出组的基础解系，则$AX=b$ 的通解为

$$X=\eta_0+k_1\xi_1+\ldots+k_{n-r}\xi_{n-r},\ k_1, \ldots, k_{n-r}\in R$$

例6 解 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5 \\ 3x_1+2x_2+x_3=13 \\ x_2+2x_3=2 \end{cases}$

解

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$R(A)=R(\overline{A})=2<n=3,$ 有无穷多解

得同解方程组 $\begin{cases} x_1=3+x_3 \\ x_2=2-2x_3 \end{cases}$

(1)求非齐次的特解: 取x_3=0, 得 $\eta_0=(3,2,0)^T$

(2)求导出组的基础解系: 取x_3=1, 得 $\xi=(1,-2,1)^T$

$AX=b$ 的通解为: $X=\eta_0+k\xi,\ k\in\mathbf{R}$

例7 解 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

解

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$R(A) = 2 \neq R(\overline{A}) = 3,$ 无解

例8 解 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$

解 $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1-\lambda^2+\lambda-\lambda^3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & (1+\lambda)^2(1-\lambda) \end{array}\right)$$

(1) $\lambda = 1$时，$R(A)=R(\overline{A})=1<n=3$， 有无穷多解

$$\overline{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

得同解方程组 $x_1 = 1 - x_2 - x_3$

导出组基础解系： $\xi_1 = (-1, 1, 0)^T$， $\xi_2 = (-1, 0, 1)^T$

非齐次特解： $\eta_0 = (1, 0, 0)^T$

原方程组通解：$X = \eta_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2,\ k_1, k_2 \in \mathbf{R}$

(2) $\lambda = -2$时，$R(A)=2 \neq R(\overline{A})=3$， 无解

(3) $\lambda \neq 1, -2$时， $R(A)=R(\overline{A})=3=n$， 有惟一解：

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-\lambda-1}{\lambda+2} \\ x_2 = \frac{1}{\lambda+2} \\ x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{cases}$$

例9 判断方程组有无解 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ ax_1 + bx_2 = c \quad (a,\ b\ ,\ c\text{互不等}) \\ a^2x_1 + b^2x_2 = c^2 \end{cases}$

解

$$\det \overline{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0$$

$R(\overline{A}) = 3,$

$R(A) = 2,$

所以，方程组无解

例10 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ 系数矩阵A的秩等于

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

的秩，证明上述方程组有解.

证

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

$\overline{A}$ 的行向量组是$\boldsymbol{B}$ 的行向量组的部分组，

所以 $\overline{A}$ 的行向量组可由$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表出

$\overline{A}$ 的行向量组的秩$\leq \boldsymbol{B}$ 的行向量组的秩

$$R(\overline{A}) \leq R(B) = R(A),$$

已知

又

$$R(A) \leq R(\overline{A}),$$

故

$$R(A) = R(\overline{A}),$$

方程组有解

思考题 1. 证明$R(A^T A) = R(A)$.

证 设A为$m \times n$矩阵, x为n维列向量.

若x满足$Ax = 0$, 则有 $A^T(Ax) = 0$, 即

$(A^T A)x = 0$;

若x满足$(A^T A)x = 0$, 则 $x^T(A^T A)x = 0$, 即

$(Ax)^T(Ax) = 0$, 从而推知$Ax = 0$.

综上可知方程组$Ax = 0$与$(A^T A)x = 0$同解,

$$\therefore \ n - R(A) = n - R(A^T A)$$

因此 $R(A^T A) = R(A)$.

2. 已知四元齐次方程组(I): $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$ 及另一四元齐次方程组 (II)的通解为

$$k_1(0,1,1,0)^T + k_2(-1,2,2,1)^T \quad (k_1, k_2 \in R).$$

问(I)与(II)是否有非零公共解?若有,求出来;若没有,说明理由.

解 将(II)的通解代入(I)得

$$\begin{cases} -k_2+k_1+2k_2=0 \\ k_1+2k_2-k_2=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=-k_2.$$

故(II)与(I)的公共解为

$$k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T=k_2(-1,1,1,1)^T$$

所有非零公共解为

$$k(-1,1,1,1)^T\ (k\neq 0).$$

3. 设A是$m\times 3$矩阵,且$R(A)=1$.如果非齐次线性方程组$Ax=b$的三个解向量η_1,η_2,η_3满足

$$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\ \eta_3+\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

求$Ax=b$的通解.

解 $\because A$是$m\times 3$矩阵，$R(A)=1$，

$\therefore Ax=0$的基础解系中含有$3-1=2$个线性无关的解向量.

方法1 令$\eta_1+\eta_2=a,\eta_2+\eta_3=b,\eta_3+\eta_1=c$，则

$$\eta_1=\frac{1}{2}(a+c-b)=\begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix},\quad \eta_2=\frac{1}{2}(a+b-c)=\begin{pmatrix}0\\1/2\\5/2\end{pmatrix},$$

$$\eta_3=\frac{1}{2}(b+c-a)=\begin{pmatrix}0\\-3/2\\-3/2\end{pmatrix},$$

$$\eta_1-\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \eta_1-\eta_3=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

为$Ax=0$的基础解系中的解向量.

故$Ax=b$的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix},$$

其中k_1,k_2为任意实数.

方法2（更简单）：

$$(\eta_1+\eta_2)-(\eta_2+\eta_3)=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\qquad (\eta_1+\eta_2)-(\eta_3+\eta_1)=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix},$$

线性无关，所以为$AX=0$的基础解系.

$$A(\frac{1}{2}(\eta_2+\eta_3))=\frac{1}{2}(b+b)=b,$$

$$\therefore \frac{1}{2}(\eta_2+\eta_3)=\begin{pmatrix}0\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

为$AX=b$ 的解.

故$Ax=b$的通解为

$$X=\begin{pmatrix}0\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix},$$

学到了什么?

齐次线性方程组

非齐次线性方程组