4.3 向量组的秩与最大无关组

主要内容：

向量组的秩与最大无关组的概念

R^n 的基、维数与坐标

一. 向量组的秩与最大无关组的概念

例1 $\alpha_1=(1,0,1),\ \alpha_2=(1,-1,1),\ \alpha_3=(2,0,2)$。

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

α_1, α_2 线性无关； α_2, α_3 线性无关，

最大无关组

定义 设向量组T满足

1° 在T中有 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性无关；

2° T中任意 $r+1$ 个向量都线性相关；

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 是向量组T的一个最大无关组，数 r 为向量组T的秩.

最大无关组一般不惟一，秩是惟一的.

若向量组线性无关，则其最大无关组就是它本身，秩 = 向量个数.

向量组线性无关(相关) $\Leftrightarrow$ 向量组的秩 = (<)向量组所含向量个数.

例2 $\mathbf{R}^n$ 的秩为 n, 且任意 n 个线性无关的 n 维向量均为$\mathbf{R}^n$ 的一个最大无关组.

矩阵A的列秩：A的列向量组的秩；

矩阵A的行秩：A的行向量组的秩.

定理1 若 $A_{m\times n} \xrightarrow{\text{行初等变换}} B$, 则$A$的任意 k个$(1\le k\le n)$个列向量与B的对应k 个列向量有相同的线性相关性.

证 $A_k \xrightarrow{\text{行初等变换}} B_k$,

任取A的k个列向量所得

$A_k X=0$与 $B_k X=0$ 同时有非零解或只有零解.

A_k 的列向量与 B_k 的列向量有相同的线性相关性.

定理2 矩阵的 行秩 = 列秩 = 矩阵的秩.

证 设 $\mathrm{R}(A)=r$,

$$A \xrightarrow{\text{行初等变换}} B(\text{行阶梯形矩阵}),$$

B有 r 个非零行，B的r 个非零行的非零首元素所在的r 个列向量线性无关，为B的列向量组的最大无关组. 

A中与B的这 r 个列向量相对应的r 个列向量也是A的列向量组的最大无关组.
故 A 的列秩等于 r . 

同理，由$\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(A^T)$, 并且$A$的行向量即为 A^T 的列向量，可得A的行秩等于 r .

定理2的证明—求向量组的秩和最大无关组的方法.

例3 求向量组α_1=(1,2,0,3), α_2 =(2,-1,3,1), α_3 =(4,-7,9,-3) 的秩和一个最大无关组，并判断线性相关性.

解

$$A=(\alpha_1^{\mathrm{T}}, \alpha_2^{\mathrm{T}}, \alpha_3^{\mathrm{T}}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

所以,秩$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 < 3$,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

α_1, α_2为一个最大无关组.

例4 求向量组

$$\alpha_1=(1,2,0,3),\ \alpha_2=(2,-1,3,1),\ \alpha_3=(4,-7,9,-3)$$

的一个最大无关组，并将其余向量用最大无关组线性表出.

解

$$A=(\alpha_1^T,\ \alpha_2^T,\ \alpha_3^T) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

$$B \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ 所以, $\alpha_3 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2.$

例5 求向量组

$$\alpha_1=(2,4,2),\ \alpha_2=(1,1,0),\ \alpha_3=(2,3,1),\ \alpha_4=(3,5,2)$$

的秩和一个最大无关组，并将其余向量用最大无关组线性表出.

解

$$A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B,$$ 所以, 秩$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$

$$B\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$ 故, $\alpha_3=\dfrac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2,\quad \alpha_4=\alpha_1+\alpha_2.$

向量组的秩与最大无关组的概念

- 向量组与其任一最大无关组等价；
- 一向量组的任两个最大无关组等价；
- 一向量组的任两个最大无关组所含向量个数相等，其个数都等于向量组的秩.

定理3 若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$可由$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$线性表出， 且$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性无关，则 $r\le s$.

证 为便于书写，不妨设向量均为列向量，设

$$A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r),\ B=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s),$$

因$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$可由$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$线性表出,所以存在

$$K=(k_{ij})_{s\times r}=(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r),\quad \text{使得}\ A=BK.$$

若 $r>s$, 则$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$线性相关, 则有不全为零的数$x_1, x_2, \ldots, x_r$使

$$(\gamma_1,\cdots,\gamma_r)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}=KX=0,$$

$$x_1\gamma_1+x_2\gamma_2+\ldots+x_r\gamma_r=0$$

所以 $AX=BKX=B0=0.$

$AX=0$有非零解，则$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性相关，矛盾！

两向量组秩的关系：

若向量组（Ⅰ）可由组（Ⅱ）线性表出，则
组（Ⅰ）的秩 $r_1 \leqslant$ 组（Ⅱ）的秩 r_2.

证 设 $\alpha_1,\dots,\alpha_{r_1}$ 为(Ⅰ) 的最大无关组为(Ⅱ) 的最大无关组.

组(Ⅰ)可由组(Ⅱ)线性表出，所以$\alpha_1,\dots,\alpha_{r_1}$ 可由 $\beta_1,\dots,\beta_{r_2}$

线性表出，又 $\alpha_1,\dots,\alpha_{r_1}$ 线性无关， 故 $r_1 \leq r_2$.

若组(Ⅰ)与组(Ⅱ)等价，则
组(Ⅰ)的秩 $r_1 =$ 组(Ⅱ)的秩 r_2.

定理4 设 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}$ 是$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$的线性无关部分组，它是最大无关组的充要条件是$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$中每一个向量均可由 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}$线性表出.

证： **充分性：** 若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$可由 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}$ 线性表出，则$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$中任$r+1$个向量线性相关(定理3逆否)，所以，$\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}$是最大无关组.

必要性： 若 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}$ 是$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$的最大无关组，

$$\forall \alpha_j \in \{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}:\begin{cases}\alpha_j \in \{\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}\} & \text{结论显然}\\ \alpha_j \notin \{\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}\} & \alpha_j,\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}\text{线性相关}\end{cases}$$

因而α_j可由$\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}$线性表出.

例6 设A, B分别为$m\times r$, $r\times n$矩阵，证明

$$R(AB)\le\min\{R(A), R(B)\}.$$

证 设$C_{m\times n}=AB$，

$$(c_1,\cdots,c_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

$$c_k=b_{1k}\alpha_1+b_{2k}\alpha_2+\cdots+b_{rk}\alpha_r,\ (k=1,\dots,n)$$

(AB)的列向量组可由A的列向量组线性表出，

故 $R(AB)\le R(A)$.

又，$R(C)=R(C^T)=R(B^TA^T)\le R(B^T)=R(B)$.

所以 $R(AB)\le\min\{R(A), R(B)\}$.

二. R^n的基、维数与坐标

$\mathbf{R}^n$：n 维向量空间

$\mathbf{R}^n$的一组基： $\mathbf{R}^n$ 的一个最大无关组

$\mathbf{R}^n$的维数($\dim \mathbf{R}^n$)：$\mathbf{R}^n$ 的秩, $\dim \mathbf{R}^n = n$.

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$为$\mathbf{R}^n$的一组基，则

$$\mathbf{R}^n = L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

又，

$$\mathbf{R}^n = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$$

R^n 的标准基

$\forall \alpha \in \mathrm{R}^n$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$为一组基，

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n$$

α 在基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$下的坐标

一个向量在确定基下的坐标是惟一的(坐标的惟一性).

例7 (1) 设$\alpha = (x_1, x_2, x_3) \neq 0$，

$L(\alpha)$： R^3的一维子空间;

(2) 设$\alpha = (x_1, x_2, x_3)$，$\beta = (y_1, y_2, y_3)$ 线性无关，

$L(\alpha, \beta)$： R^3的二维子空间.

学到了什么?

向量组的秩与最大无关组的概念

R^n 的基、维数与坐标