4.2 向量组的线性相关性

主要内容：

- 向量组的线性组合
- 向量组的线性相关性

向量组与矩阵

向量组: 同维数的向量所组成的集合.

向量组与矩阵:

例如　矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$有n个m维的列向量

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & & a_j & & a_n \end{array}\\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\end{array}$$

向量组$a_1,a_2,\cdots,a_n$称为矩阵A的列向量组.

类似地, 矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$又有m个n维行向量

$$A=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc}\boxed{a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}} \\ \boxed{a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \boxed{a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}}\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{c}\alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \\ \alpha_i^T \\ \\ \alpha_m^T\end{array}$$

向量组$\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_m^T$称为矩阵$A$的行向量组.

反之，由有限个向量所组成的向量组可以构成一个矩阵.

向量组的线性组合

一. 向量组的线性组合

定义

若存在数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m,$$

则称向量 β 为向量组α_1，α_2，…，α_m 的线性组合，

或称 β 可由α_1，α_2，…，α_m 线性表出.

$L(\alpha_1,\alpha_2, \dots, \alpha_m)$: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性组合的全体.

向量组的线性组合

例1： 零向量是任一向量组的线性组合.

$$0 = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_m.$$

例2： 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$中任一向量都可由这个向量组线性表出.

$$\alpha_i = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_{i-1} + 1\alpha_i + 0\alpha_{i+1} + \cdots + 0\alpha_m.$$

例3： $R^3 = L(i, j, k)$,

因为 $(x_1, x_2, x_3) = x_1 i + x_2 j + x_3 k$

$R^2 = L(i, j)$,

向量组的线性组合

$R^n = L(\varepsilon_1, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$,

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

即，任一n维向量均可由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性表出.

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n.$$

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathrm{R}^n$, 则$L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$为$R^n$的一个子空间——由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 生成的子空间.

向量组的线性组合

定理1 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 则下列命题等价：

1^{o} $b\in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$;

2^{o} $AX=b$有解;

3^{o} $R(\overline{A})=R(A)$.

证 $1^{o}\Leftrightarrow 2^{o}$: $b\in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

$\Updownarrow$

有数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 使得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b$,

$\Updownarrow$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=b, \Leftrightarrow AX=b\text{有解}X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

向量组的线性组合

证　$2^{\mathrm{o}} \Leftrightarrow 3^{\mathrm{o}}$：　设 $\mathrm{R}(A) = r$,

$$\overline{A} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & c_{rs} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ & & & & & d_{r+1} \\ & & O & & & \vdots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = (B, d),$$

$AX = b$ 与 $BX = d$ 同解. 所以

$AX = b$ 有解 $\Leftrightarrow$ $d_{r+1} = 0$ $\Leftrightarrow \mathrm{R}(B, d) = \mathrm{R}(B) = r \Leftrightarrow R(\overline{A}) = R(A)$.

向量组的线性组合

例1： 将$\beta = (1,0,-4)^T$ 用$\alpha_1 = (0,1,1)^T$, $\alpha_2 = (1,0,1)^T$,$\alpha_3 = (1,1,0)^T$ 线性表出.

解

$$\overline{A} = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

所以，$\beta = -\frac{5}{2}\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2 + \frac{5}{2}\alpha_3.$

向量组的线性组合

定义2

$$(\text{Ⅰ}): \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r,$$

$$(\text{Ⅱ}): \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s,$$

若组(Ⅰ)中每一个向量都可由(Ⅱ)中的向量线性表出，则称组(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表出. 若组(Ⅰ)与组(Ⅱ)可以互相线性表出，则称组(Ⅰ)与组(Ⅱ)**等价**.

等价关系有性质：

(1) **反身性**：每一向量组都与自身等价；

(2) **对称性**：(Ⅰ)与(Ⅱ)等价，则(Ⅱ)与(Ⅰ)等价；

(3) **传递性**：(Ⅰ)与(Ⅱ)等价，(Ⅱ)与(Ⅲ)等价,则 (Ⅰ)与(Ⅲ)等价.

二. 向量组的线性相关性

定义 若存在不全为零的数$x_1, x_2, \cdots, x_m$使得

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0 \qquad (*)$$

则称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关；否则，称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关.

特殊情形：

(1) 一个向量α:

α 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = 0$ (线性无关 $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$);

(2) 两个向量α_1, α_2 :

α_1, α_2线性相关(无关) $\Leftrightarrow$ 它们的对应分量(不)成比例.

向量组的线性相关性

例1 n 维单位向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关.

证 考察 $x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n=0,$

$$\Leftrightarrow \quad x_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots x_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}. \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

即只有 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0.$

例2 含有零向量的向量组线性相关.

证 $1\,\mathbf{0}+0\boldsymbol{\alpha}_1+\ldots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$

向量组的线性相关性

定理2 设有m维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$,则下列命题等价：

1^o $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性相关;

2^o $AX=0$有非零解;

3^o $R(A)<n$

证 $1^o \Leftrightarrow 2^o$: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性相关

⇕

有不全为零的数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$使 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$,

⇕

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0, \quad \Leftrightarrow \quad AX=0\text{有非零解}X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

向量组的线性相关性

$2^{\circ} \Leftrightarrow 3^{\circ}$： 设 $\mathrm{R}(A) = r$,

$$A \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} & \cdots & c_{1n} \\ & \cdots & & \cdots & \\ & & c_{rs} & \cdots & c_{rn} \\ & O & & & \end{pmatrix} = B.$$

$AX = 0$与$BX = 0$ 同解.

$BX = 0$有非零解$\Leftrightarrow r < n$

故，$AX = 0$有非零解 $\Leftrightarrow r < n$.

向量组的线性相关性

向量个数 ＝ 向量维数：

推论1 设有n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，$A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$，则下列命题等价：

1° $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关；

2° $AX = 0$有非零解；

3° $\det A = 0$.

几何意义：

在$\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$中， α_1, α_2线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1 // \alpha_2$ (或共线).

在 $\mathbf{R}^3$中， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 共面.

向量组的线性相关性

推论2 向量个数 >向量维数 的向量组必线性相关.

证 设 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)_{m\times n}$, $n>m$, 则

$$R(A)\le m<n,$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关.

在$\mathbf{R}^n$中，任 $n+1$个向量必线性相关.

向量组的线性相关性

例3 判断向量组$\alpha_1=(0,1,1)$, $\alpha_2=(1,0,1)$, $\alpha_3=(1,1,0)$的线性相关性

解1

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$ 所以,α_1, α_2 , α_3线性无关.

解2

$$A = (\alpha_1{}^T, \alpha_2{}^T, \alpha_3{}^T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{R}(A) = 3$, 所以, α_1, α_2 , α_3线性无关.

向量组的线性相关性

例4 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，证明：$\beta_1 = \alpha_1+\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2+\alpha_3, \beta_3 = \alpha_3+\alpha_1$线性无关.

证 设 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0,$

即 $x_1(\alpha_1+\alpha_2) + x_2(\alpha_2+\alpha_3) + x_3(\alpha_3+\alpha_1) = 0.$

即 $(x_1+x_3)\alpha_1 + (x_1+x_2)\alpha_2 + (x_2+x_3)\alpha_3 = 0.$

因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，所以只有

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad (*) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

所以(*)只有零解. 故，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

线性相关性的基本定理

定理3 若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关，则$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$线性相关.

证 由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关，知有不全为零的数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 使

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_m\alpha_m = 0.$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_m\alpha_m + 0\alpha_{m+1} + \ldots + 0\alpha_n = 0.$$

$x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0$ 不全为零，故$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性相关.

“部分相关，则整体相关.”

“整体无关，则部分无关.”

向量组的线性相关性

定理4 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m\geq 2)$线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表出.

证 充分性 不妨设α_1可由 $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性表出，即有数 $x_2, \ldots, x_m$ 使得

$$(-1)\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0,$$

因 $-1, x_2, \ldots, x_m$ 不全为零，故$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性相关.

必要性 有不全为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = 0.$$

因 $k_1, k_2, \ldots, k_m$不全为零，不妨设 $k_1\neq 0$，则

$$\alpha_1 = (-\frac{k_2}{k_1})\alpha_2 + \cdots + (-\frac{k_m}{k_1})\alpha_m,$$

α_1可由 $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性表出.

即 “$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关 ⇔ 其中任一向量都不能由其余向量线性表出.”

向量组的线性相关性

定理5　若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$，$\beta$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性表出，且表式惟一.

证　有不全为零的数$k_1, k_2, \ldots, k_m, k$使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}.$$

若$k=0$，则

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

而$k_1, k_2, \ldots, k_m$不全为零,与$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关矛盾.

所以$k\neq 0$，

$$\beta=(-\frac{k_1}{k})\alpha_1+(-\frac{k_2}{k})\alpha_2+\cdots+(-\frac{k_m}{k})\alpha_m,$$

向量组的线性相关性

下证β由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性表出的表式惟一：

设
$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m,$$
$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m,$$

所以 $(k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_m - l_m)\alpha_m = 0,$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关，所以

$$k_1 - l_1 = k_2 - l_2 = \cdots = k_m - l_m = 0,$$

故表式惟一.

学到了什么?

向量组的线性组合

向量组的线性相关性