


4.1 n 维向量空间

主要内容: n 维向量空间的概念

R^n 的子空间

- 一. n 维向量空间的概念

- 几何空间中: $\vec{a} := \overrightarrow{OP} = (a_1, a_2, a_3)$

点P的坐标

- 向量的线性运算:

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$
$$k \cdot \alpha = (ka_1, ka_2, ka_3).$$

●所有三维向量组成的集合，按上述线性运算，满足：

$$(1) \alpha + \beta = \beta + \alpha;$$

$$(2) (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma);$$

$$(3) \alpha + \mathbf{0} = \alpha;$$

$$(4) \alpha + (-\alpha) = \mathbf{0};$$

$$(5) 1 \alpha = \alpha;$$

$$(6) k(l \alpha) = (kl) \alpha;$$

$$(7) k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta;$$

$$(8) (k+l) \alpha = k \alpha + l \alpha.$$

称这个集合构成一个三维向量空间，记为 R^3 .

- n 维向量空间 (R^n):

- n 维向量:

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

有序数组

n 维行向量

α 的分量

n 维列向量: $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

- 实 (复) 向量: 分量为实 (复) 数

n 维向量的实际意义

确定飞机的状态，需要以下6个参数：

- 机身的仰角 φ $(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$
- 机翼的转角 ψ $(-\pi < \varphi \leq \pi)$
- 机身的水平转角 θ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$
- 飞机重心在空间的位置参数 $P(x, y, z)$



所以，确定飞机的状态，需用**6维向量**： $a = (x, y, z, \varphi, \psi, \theta)$

- 向量相等： $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow a_i = b_i$$

- 零向量： $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$

- 负向量： $-\alpha = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$

- R^n ： n 维向量的全体.

- n 维向量的线性运算： $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n),$

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

$$k \cdot \alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n), k \in R.$$

加法与数乘满足：

$$(1) \alpha + \beta = \beta + \alpha;$$

$$(2) (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma);$$

$$(3) \alpha + 0 = \alpha;$$

$$(4) \alpha + (-\alpha) = 0;$$

$$(5) 1 \alpha = \alpha;$$

$$(6) k(l\alpha) = (kl)\alpha;$$

$$(7) k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta;$$

$$(8) (k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha.$$

称 R^n 构成 n 维实向量空间.

● 二. R^n 的子空间

● 定义

$\varphi \neq V \subset R^n$, 且 $\forall \alpha, \beta \in V, k \in R$, 有 $\alpha + \beta \in V, k\alpha \in V$,
则称 V 是 R^n 的一个子空间.

例1 : 设 $V = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 = 0\}$, V 是否是 R^2 的子空间?

例2 : 设 $V = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 = 1\}$, V 是否是 R^2 的子空间?



例3 : 过坐标原点的平面为 R^3 的一个子空间;
过坐标原点的空间直线为 R^3 的一个子空间.

但是:

- ◆ 不经过坐标原点的平面不是 R^3 的一个子空间;
- ◆ 不经过坐标原点的空间直线不是 R^3 的一个子空间.

因为, 不存在零元 (0).

n 维向量空间的概念

R^n 的子空间