3.4 空间直线

主要内容:

- 点向式方程
- 参数式方程
- 一般式方程
- 直线与直线的位置关系
- 直线与平面的位置关系

一、点向式方程

方向向量的定义：

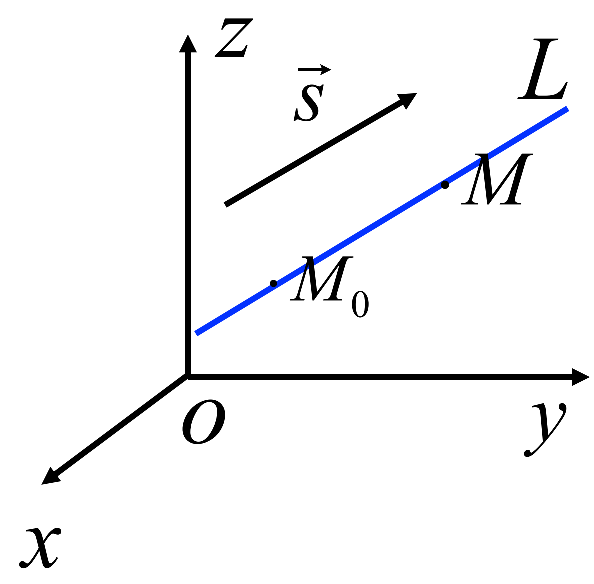
如果一非零向量$\vec{s}$平行于一条已知直线L，向量$\vec{s}$称为直线L的方向向量.

$$M_0(x_0, y_0, z_0), M(x, y, z),$$

$$\forall\ M \in L, \overrightarrow{M_0M} // \vec{s}$$

$$\vec{s} = (m, n, p),$$

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$



空间直线

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}}$$

直线的点向式方程

直线的一组方向数

方向向量的方向余弦称为直线的方向余弦.

例1 求过空间两点$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$的直线方程.

解 $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$,

$$l: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

例2 $l: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-2}{0} = z - 1.$

说明: (1) $\vec{s} = (2,0,1)$,

(2) $y - 2 = 0$, 即：l 在平面 $y=2$上.

例3 一直线过点$A(2,-3,4)$且和y轴垂直相交，求其方程。

解 因为直线和y轴垂直相交

所以交点为$B(0,-3,0)$

取$\vec{s}=\overrightarrow{BA}=(2,0,4)$

所求直线方程：$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{0}=\dfrac{z-4}{4}.$

二、参数式方程

设直线 l 的方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

则

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

上式称为直线l 的参数方程，t 称为参数，不同的t 对应于直线l 上不同的点.

例4 设l过$M(3,4,-4)$, $\vec{s}$是l的方向向量，$\vec{s}$的方向角为$\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}$，求$l$的方程。

解： $\vec{e}_s=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2})$

取$\vec{s}=(1,\sqrt{2},-1)$

$$l:\begin{cases} x=x_0+t \\ y=y_0+\sqrt{2}t \\ z=z_0-t \end{cases}$$

例5 求过点$M(2,1,3)$且与直线$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$垂直相交的直线方程。

解 先作一过点M且与已知直线垂直的平面 Π

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与该平面的交点N,

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}=t \quad \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1. \\ z=-t \end{cases}$$

代入平面方程得$\boldsymbol{t}=\frac{3}{7}$，交点$\boldsymbol{N}(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$

取所求直线的方向向量为$\overrightarrow{\boldsymbol{MN}}$

$$\vec{MN}=(\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3)=(-\frac{12}{7},\frac{6}{7},-\frac{24}{7}),$$

所求直线方程为

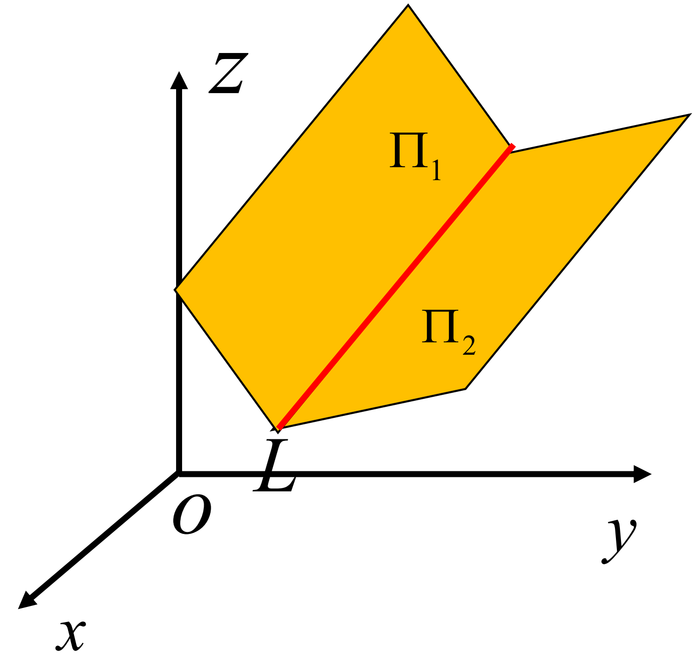
$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

三、一般式方程

空间直线可看成两平面的交线.

$$\Pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}}$$

空间直线的一般式方程

例6 用点向式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$

解一 在直线上任取一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$

$$取x_0=1 \Rightarrow \begin{cases} y_0+z_0+2=0 \\ y_0-3z_0-6=0 \end{cases},$$

解得$y_0=0,\quad z_0=-2$

M_0点的坐标为$(1,0,-2)$,

一般式方程

因所求直线与两平面的法向量都垂直

取$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(4,-1,-3)$,

点向式方程

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z+2}{-3},$$

参数方程

$$\begin{cases} x=1+4t \\ y=-t \\ z=-2-3t \end{cases}$$

解二 由解法一已得直线上点M_0的坐标(1,0,-2),

取 $x_1=0$, 则

$$\begin{cases} y_1+z_1+1=0 \\ -y_1+3z_1+4=0 \end{cases}$$

解得 $y_1=\frac{1}{4}, z_1=-\frac{5}{4}$, 得点$M_1$的坐标$(0,\frac{1}{4},-\frac{5}{4})$

$$\overrightarrow{M_0M_1}=(-1,\frac{1}{4},\frac{3}{4}),$$

取直线的方向向量为$\vec{s}=(4,-1,-3)$,

得直线方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z+2}{-3},$$

解三 由直线方程 $\begin{cases} x+y+z+1=0 & (1) \\ 2x-y+3z+4=0 & (2) \end{cases}$

(1)+(2): $3x+4z+5=0 \Longrightarrow z=\dfrac{-3x-5}{4},$

(1)×2-(2): $3y-z-2=0 \Longrightarrow z=3y-2$

$$\frac{-3x-5}{4}=\frac{3y-2}{1}=\frac{z}{1}, \quad 即 \quad \frac{x+\frac{5}{3}}{-4}=\frac{y-\frac{2}{3}}{1}=\frac{z}{3}. \qquad (3)$$

方程(3)的方向向量(−4, 1, 3)与(4, −1, −3)平行，且点 $\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},0\right)$在解法一、二所确定的直线上，故方程(3)与解法一、二所得的方程表示的为同一直线.

解四（用高斯消元法——行初等变换）

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\therefore\begin{cases} x=1-4y \\ z=-2+3y \end{cases}$$

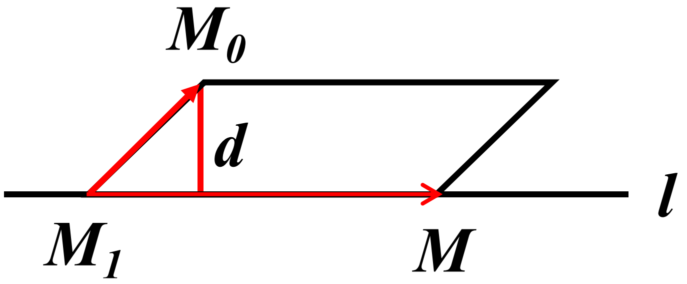
参数式：

$$\therefore\begin{cases} x=1-4t \\ y=t \\ z=-2+3t \end{cases}$$

例7 确定直线l外一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$到 l的距离.

解： 设$M_1(x_1,y_1,z_1)$是直线l 上任意一确定的点，

$$\overrightarrow{M_1M}=\vec{s}=(m,n,p),$$



则直线l 的方程为

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p},$$

如图所示平行四边形面积

$$S=\|\overrightarrow{M_1M_0}\times\overrightarrow{M_1M}\|=\|\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_0}\|=d\,\|\vec{s}\|$$

$$d=\frac{\|\vec{s}\times M_1M_0\|}{\|\vec{s}\|}.$$

例8 求点$M_0(1,2,1)$到直线$l:\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$的距离。

解 取 $z=0$, 得 $x=1, y=1, M_1(1,-1,0)\in l.$

$$\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k},$$

$$\overrightarrow{M_1M_0}=(0,3,1).$$

$$d=\frac{\|\vec{s}\times M_1M_0\|}{\|\vec{s}\|}=\cdots=\sqrt{\frac{35}{6}}.$$

四. 直线与直线的位置关系

两直线L_1与L_2的方向向量$\overrightarrow{s_1}$与$\overrightarrow{s_2}$的夹角（通常指锐角）称为L_1与L_2的夹角，记为$\langle L_1, L_2\rangle$.

直线$\boldsymbol{L_1}$： $$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

直线$\boldsymbol{L_2}$： $$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

$$\cos < L_1, L_2 >=\frac{\left|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2\right|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

2. 两直线的位置关系：

$$\boxed{(1) L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,}$$

$$\boxed{(2) L_1 \mathbin{/\!/} L_2 \Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2},}$$

例： 直线$L_1 : \vec{s}_1 = (1,-4,0),$

直线$L_2 : \vec{s}_2 = (0,0,1),$

$\because \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0, \quad \therefore \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$， 即 $L_1 \perp L_2$.

例9 求过点(−3,2,5)且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程。

解 设所求直线的方向向量为$\vec{s}=(m,n,p)$,

根据题意知：$\vec{s}\perp\vec{n}_1, \vec{s}\perp\vec{n}_2$,

取：$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-4,-3,-1)$,

所求直线的方程为：

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

例10 判断直线$\begin{cases} l_1: x = y = z - 4 \\ l_2: -x = y = z \end{cases}$的位置关系？

解 $(1)\vec{s}_1 = (1,1,1), \vec{s}_2 = (-1,1,1)$

$\vec{s}_1$不平行$\vec{s}_2$，l_1不平行l_2

$(2) M_1(0,0,4) \in l_1, M_2(0,0,0) \in l_2,$

$$\left[\vec{M_1N_1}, \vec{s}_1, \vec{s}_2\right] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

$\therefore l_1$与l_2异面

五、直线与平面的位置关系

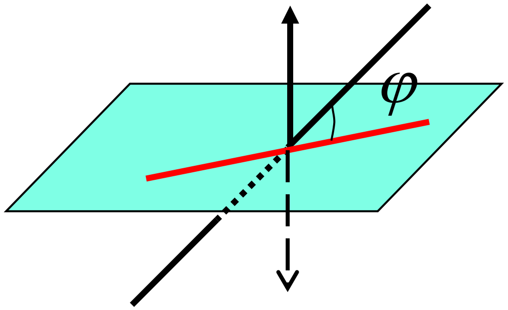
1、直线与平面的夹角

直线和它在平面上的投影直线的夹角$\varphi\left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$称为直线与平面的夹角.

$$L: \quad \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

$$\Pi: \quad Ax+By+Cz+D=0,$$

$$\vec{s}=(m, n, p), \vec{n}=(A, B, C),$$



$$<\vec{s}, \vec{n}>=\frac{\pi}{2}-\varphi \qquad <\vec{s}, \vec{n}>=\frac{\pi}{2}+\varphi$$

$$\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right|.$$

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

直线与平面的夹角公式

2. 直线与平面的位置关系：

$$(1) L \perp \prod \Longleftrightarrow \quad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

$$(2) L // \prod \Longleftrightarrow \quad Am + Bn + Cp = 0.$$

例11 设直线L: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$, 平面$\Pi$: $x-y+2z=3$, 求直线与平面的夹角。

解 $\vec{n}=(1,-1,2),\vec{s}=(2,-1,2)$,

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$$=\frac{|1\times 2+(-1)\times(-1)+2\times 2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{7}{3\sqrt{6}}.$$

$\therefore\quad \varphi=\arcsin\dfrac{7}{3\sqrt{6}}$ 为所求夹角

例12 判断$l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{2}$与$\pi$：$x+4y-z-1=0$的位置关系.

若相交，则求出交点与夹角.

解 $\vec{s}=(1,-2,2), \vec{n}=(1,4,-1)$

$\vec{s}\cdot\vec{n}=-9\neq 0$, 所以$l$与$\pi$相交

$$l:\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \\ z=2t \end{cases} \qquad \text{代入}\pi\text{，得}t=-\frac{8}{9}$$

所以l与π交点 $\left(\dfrac{1}{9},-\dfrac{2}{9},-\dfrac{16}{9}\right)$

$$\therefore \varphi=\arcsin\frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{\|\vec{n}\|\|\vec{s}\|}=\arcsin\frac{|1-8-2|}{\sqrt{18}\sqrt{9}}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$$

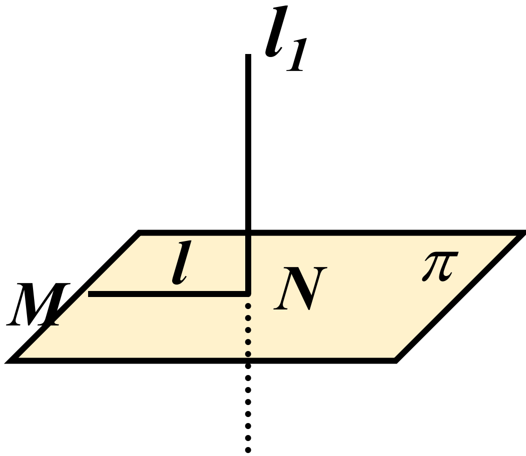
例13 直线l过点$M(2,5,-2)$且与直线

$$l_1:\begin{cases} x-y+2z-4=0 \\ 3x+4y+z \quad =0 \end{cases}$$

垂直相交，求l的方程.

解 只需求出交点N的坐标即可.

过M作平面π与l_1垂直,π与l_1的交点即N.



l_1的方向向量:

$$\vec{s}_1=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-9\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}.$$

过$M(2,5,-2)$且与l_1垂直的平面

π: $-9(x-2)+5(y-5)+7(z+2)=0.$

$9x-5y-7z-7=0.$

将直线l_1与π的方程联立：

$$\begin{cases} x-y+2z-4=0 \\ 3x+4y+z=0 \\ 9x-5y-7z-7=0 \end{cases} \qquad \overline{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

解得：$x=1, y=-1, z=1.$

这就是l_1与π 的交点N的坐标$(1,-1,1)$.

直线l的方向向量

$\vec{s} = \overrightarrow{MN} = (-1,-6,3).$

l 的方程:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z+2}{3}.$$

直线与平面的位置关系

3. 平面束

设直线l的方程是

$$\boxed{\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\cdots(1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\cdots(2) \end{cases}}$$

除方程(2)所表示的平面外，经过直线l的所有平面都可由下式表示：

$$\boxed{A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad (3)}$$

经过直线l的平面全体称为过l的平面束.

方程(3)称为过直线l的平面束方程.

例14 求直线

$$l: \frac{x-4}{4}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-2}{3}$$

在平面

$$\pi: 2x+2y+z-11=0$$

上的投影直线.

解 (1) 过直线l作一平面π'与π垂直，则π'与π的交线l'就是l在π上的投影

将l的方程改写为一般式

$$\begin{cases} x+4y-24=0 \\ 3y+z-17=0 \end{cases}$$

Tip: 任何两项交替相乘化简

直线与平面的位置关系

过l的平面束方程为

$$x+4y-24+\lambda(3y+z-17)=0$$

即

$$x+(4+3\lambda)y+\lambda z-(24+17\lambda)=0$$

其法向量为

$$\overrightarrow{n'}=(1,4+3\lambda,\lambda),$$

由$\pi'\perp\pi$可得:

$$\vec{n}\cdot\vec{n}'=2\cdot1+2(4+3\lambda)+1\cdot\lambda=7\lambda+10=0$$

$$\lambda=-\frac{10}{7},$$

π'的方程为：

$$x+(4-\frac{30}{7})y-\frac{10}{7}z-(24-\frac{170}{7})=0,$$

即

$$7x - 2y - 10z + 2 = 0$$

直线l在π上的投影为

$$l':\begin{cases}7x-2y-10z+2=0\\2x+2y+z-11=0\end{cases}$$

解（2）作过l且与π垂直的π'. 则l上的点$M(4, 5, 2)$在π'上

$$取\vec{n}' = \vec{s} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-7,2,10)$$

$$\therefore \pi' : -7(x-4) + 2(y-5) + 10(z-5) = 0$$

$$即 7x - 2y - 10z + 2 = 0$$

所以l在π上的投影直线为：$l': \begin{cases} 7x - 2y - 10z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + z - 11 = 0 \end{cases}$

学到了什么

点向式方程

参数式方程

一般式方程

直线与直线的位置关系

直线与平面的位置关系