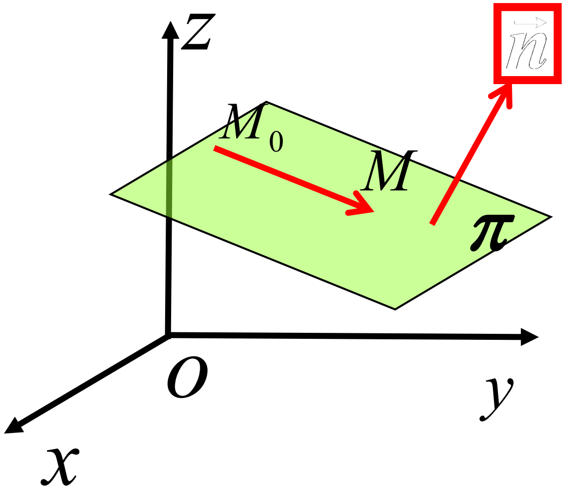
3.3 平面

主要内容：

- 点法式方程
- 一般式方程
- 截距式方程
- 平面与平面的位置关系

一、点法式方程

平面π 可由π 上任意一点和垂直于π 的任一向量完全确定. 垂直于π 的任一向量称为π 的**法线向量**.



法线向量的特征：垂直于平面内任一向量

设 $\vec{n}=(A,B,C), M_0(x_0,y_0,z_0)$

$M(x,y,z)$为平面π上的任一点,

必有$M_0M \perp \vec{n} \Rightarrow M_0M \cdot \vec{n}=0$

点法式方程

$\because \overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0),$

$$\therefore \quad A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (1)$$

方程(1)称为平面的点法式方程,

其中法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$,已知点（x_0, y_0, z_0).

平面上的点都满足方程(1)，不在平面上的点都不满足方程（1），方程(1)称为平面π 的方程，平面π 称为方程(1)的图形.

点法式方程

例1 求过三点$A(2,-1,4)$, $B(-1,3,-2)$和$C(0,2,3)$的平面方程

解 $\overrightarrow{AB}=\{-3,4,-6\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-2,3,-1\}$

取$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{14,9,-1\}$,

所求平面方程为:

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0,$$

化简得

$$14x+9y-z-15=0.$$

例2 求过点(1,1,1)，且垂直于平面$x - y + z = 7$和$3x + 2y - 12z + 5 = 0$的平面方程

解 $\vec{n}_1 = (1,-1,1), \vec{n}_2 = (3,2,-12)$

取法向量$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (10,15,5)$,

所求平面方程为

$$10(x-1) + 15(y-1) + 5(z-1) = 0,$$

化简得

$$2x + 3y + z - 6 = 0.$$

二、一般式方程

由平面的点法式方程

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$

$$\boxed{\Rightarrow Ax+By+Cz-\underbrace{\boxed{(Ax_0+By_0+Cz_0)}}_{=D}=0}$$

$$Ax+By+Cz+D=0$$ 平面的一般方程

法向量 $\vec{n}=(A,B,C).$

平面一般方程的几种特殊情况：

(1) $D=0$, 平面通过坐标原点；

$$(2)\ A=0,\begin{cases} D=0,\text{平面通过}x\text{轴；} \\ D\neq 0,\text{平面平行于}x\text{轴；} \end{cases}$$

类似地可讨论$B=0, C=0$的情形.

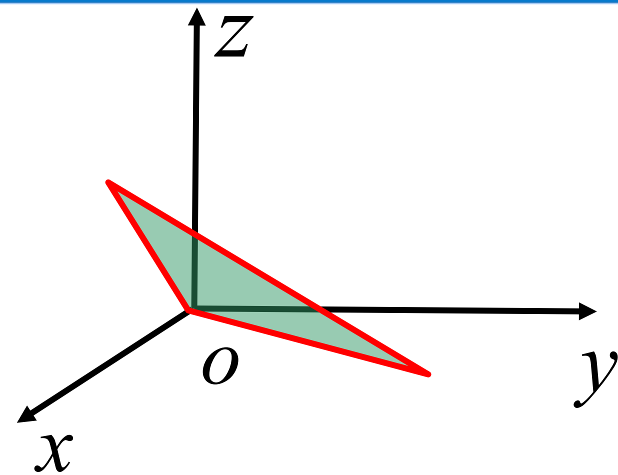
(3) $A=B=0$, 平面那个性与xoy坐标面；

类似地可讨论$A=C=0, B=C=0$的情形.

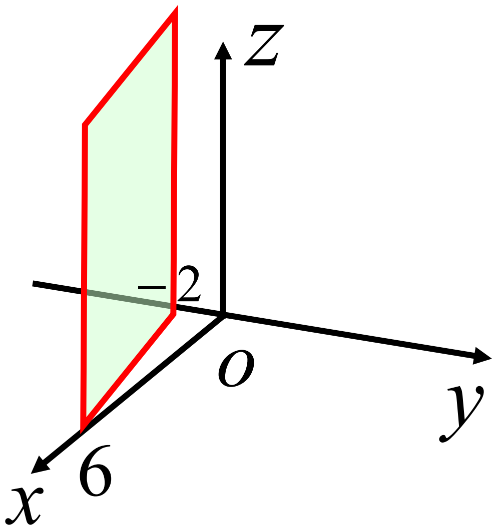
一般式方程

例3 观察下列平面

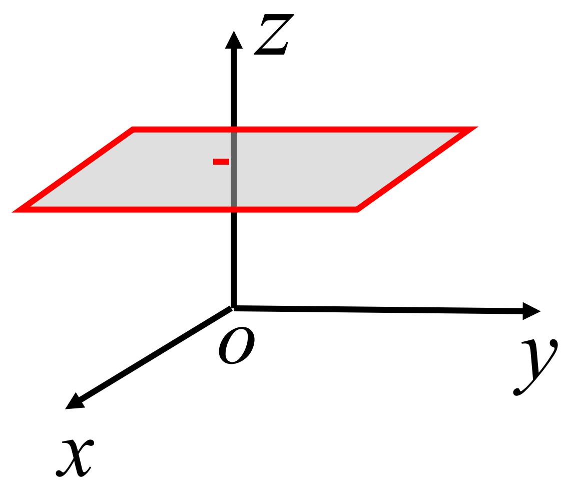
(1) $2x - y - z = 0;$



(2) $-x + 3y + 6 = 0;$



(3) $3z - 7 = 0.$



例4 设平面过原点及点（6，-3，2），且与平面$4x-y+2z=8$垂直，求此平面方程.

解 设平面为$Ax+By+Cz+D=0$,

由平面过原点知$D=0$,

由平面过点（6,-3,2）知$6A-3B+2C=0$

$\because \vec{n} \perp (4,-1,2)$,

$\therefore 4A-B+2C=0$

$\Rightarrow A=B=-\dfrac{2}{3}C$,

所求平面方程为： $2x+2y-3z=0$.

三. 截距式方程

例5 设平面与x, y, z三轴分别交于$P(a,0,0), Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$(其中$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$), 求此平面方程.

解1 设平面为$Ax + By + Cz + D = 0$,

将三点坐标代入得$\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$

$$\Rightarrow A = -\frac{D}{a}, B = -\frac{D}{b}, C = -\frac{D}{c}.$$

截距式方程

$$将 A=-\frac{D}{a}, B=-\frac{D}{b}, C=-\frac{D}{c},$$

代入所设方程得

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$

平面的截距式方程

x轴上的截距　y轴上的截距　z轴上的截距

截距式方程

解2 (点法式) 取 $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = (-a, b, 0)(-a, 0, c)$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = (bc, ac, ab)$$

所以， π: $bc(x-a) + ac(y-0) + ab(z-0) = 0$

$$bcx + acy + abz = abc$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

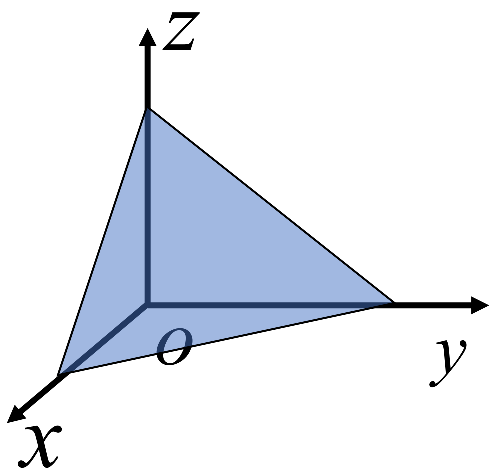
例6 求平行于平面$6x+y+6z+5=0$而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

解 设平面为$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,$

$$\because V=1, \therefore \ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}abc=1,$$

由所求平面与已知平面平行得

$$\frac{1/a}{6}=\frac{1/b}{1}=\frac{1/c}{6},$$



截距式方程

化简得 $\frac{1}{6a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{6c}$,　　令 $\frac{1}{6a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{6c}=t$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{6t}, b=\frac{1}{t}, c=\frac{1}{6t},$$

代入体积式

$$\therefore 1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6t}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6t}\Rightarrow t=\frac{1}{6},$$

$$\therefore a=1,\quad b=6,\quad c=1,$$

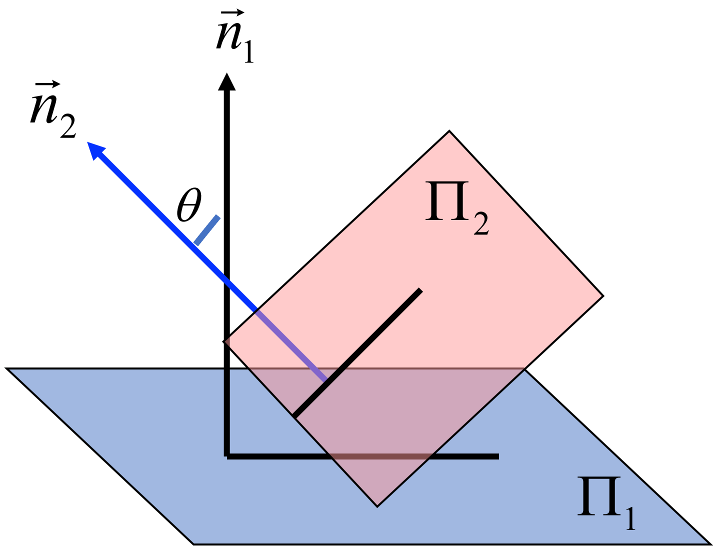
所求平面方程为：　$6x+y+6z=6.$

四、平面与平面的位置关系

1. 两平面的夹角

定义 两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角.

（通常取锐角）



$$\Pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\Pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2),$$

平面与平面的位置关系

按照两向量夹角余弦公式有

$$\boxed{\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^{\ 2} + B_1^{\ 2} + C_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{A_2^{\ 2} + B_2^{\ 2} + C_2^{\ 2}}}}$$

两平面夹角余弦公式

2. 两平面垂直与平行的充要条件：

$$\boxed{(1) \quad \Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;}$$

$$\boxed{(1) \quad \Pi_1 // \Pi_2 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} + \frac{B_1}{B_2} + \frac{C_1}{C_2}.}$$

例7 讨论以下各组平面的位置关系：

(1) $-x+2y-z+1=0,\qquad y+3z-1=0$

(2) $2x-y+z-1=0,\qquad -4x+2y-2z-1=0$

(3) $2x-y-z+1=0,\qquad -4x+2y+2z-2=0$

解(1) $$\cos\theta=\frac{|-1\times 0+2\times 1-1\times 3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}$$

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{60}}$两平面相交，夹角$\theta=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{60}}$.

解(2) $\vec{n}_1 = (2,-1,1), \vec{n}_2 = (-4,2,-2)$

$$\Rightarrow \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2},$$ 两平面平行

$\because M(1,1,0) \in \Pi_1 \quad M(1,1,0) \notin \Pi_2$

两平面平行但不重合.

或:

$$\pi_1 : 2x - y + z - 1 = 0$$

$$\pi_2 : 2x - y + z + \frac{1}{2} = 0$$

所以，两平面平行但不重合.

解(3) $\because \dfrac{2}{-4}=\dfrac{-1}{2}=\dfrac{-1}{2}$，两平面平行

$\because M(1,1,0)\in\Pi_1 \quad M(1,1,0)\in\Pi_2$

所以两平面重合.

或：

$$\pi_1: 2x-y+z+1=0$$

$$\pi_2: 2x-y+z+1=0$$

所以，两平面重合.

平面与平面的位置关系

例8 求过点$M_0(-1,3,2)$且与平面$2x - y + 3z - 4 = 0$和$x + 2y + 2z - 1 = 0$都垂直的平面π的方程.

解： 两个已知平面的法向量为

$$\vec{n}_1 = (2,-1,3), \vec{n}_2 = (1,2,2),$$

故平面π的法向量为

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$$

故平面π的方程为

$$-8(x+1)-(y-3)+5(z-2)=0,$$

即

$$8x+y-5z+15=0.$$

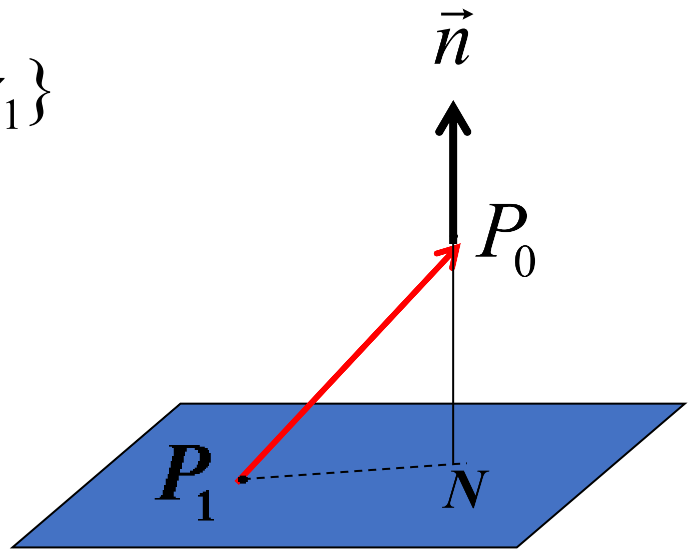
例9 求点$P_0(x_0,y_0,z_0)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离.

解 $\forall P_1(x_1, y_1, z_1)\in \Pi$

$$\overrightarrow{P_1P_0}=\{x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1\}$$

$$d=|\mathrm{Prj}_{\vec{n}}\ \overrightarrow{P_1P_0}|$$

$$=\frac{|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$



平面与平面的位置关系

$$=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\because\ Ax_1+By_1+Cz_1+D=0,(P_1\in\Pi)$$

$$\therefore\quad d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

点到平面距离公式

学到了什么

点法式方程

一般式方程

截距式方程

平面与平面的位置关系