3.2 向量的乘法

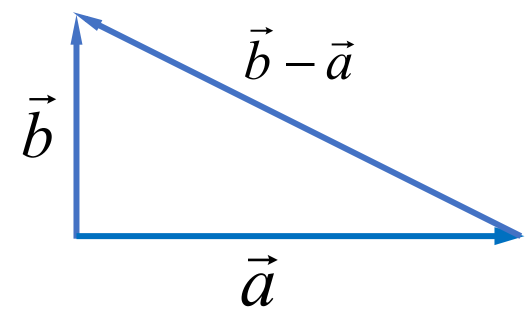
主要内容：

- 内积
- 外积
- 混合积

一、内积

设非零向量$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$相互垂直，则由右图可知：

$$\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2=\|\vec{b}-\vec{a}\|^2$$



即 $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$

$$=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2$$

由此式可推出

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

内积

定义 设向量

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

称为$\vec{a}$与$\vec{b}$的内积（或数量积）. $\vec{a}\cdot\vec{a}$记为$\vec{a}^2$

由定义可知，基向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$的内积为

$$\boxed{\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1,\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0.}$$

向量的内积具有以下性质:

(1) $\vec{a}^2 = \|\vec{a}\|^2$;

证 $\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 = \|\vec{a}\|^2$.

(2) $\vec{a}\cdot\vec{0} = 0$;

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$,

(4) $(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b}) = \lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b}),\ \lambda,\mu\in R$;

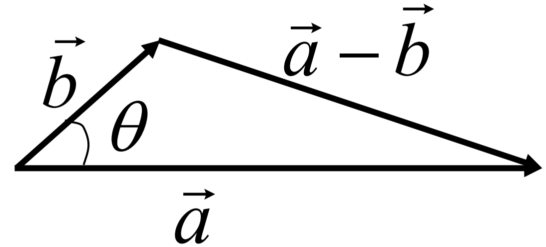
(5) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

性质(2)—(5)很容易用内积定义作出证明.

内积

由余弦定理可知

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$



$$\begin{aligned}2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta &= \|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-\|\vec{a}-\vec{b}\|^2\\ &= a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2\\ &\quad -(a_1-b_1)^2-(a_2-b_2)^2-(a_3-b_3)^2\\ &= 2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\end{aligned}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta=\|\vec{a}\|\operatorname{Pr}j_{\vec{a}}\vec{b}=\|\vec{b}\|\operatorname{Pr}j_{\vec{b}}\vec{a}.$$

内积

若 $\|\vec{a}\| \neq 0, \|\vec{b}\| \neq 0$, 则

$$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

$$=\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\cdot\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}=\vec{e}_{\vec{a}}\cdot\vec{e}_{\vec{b}}$$

若 $<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\pi}{2}$, 则称$\vec{a}$与$\vec{b}$正交（或垂直），记为$\vec{a}\perp\vec{b}$.

$$\boxed{\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.}$$

例1 设 $\|\vec{a}\|=11, \|\vec{b}\|=23, \|\vec{a}-\vec{b}\|=30$, 求 $\|\vec{a}+\vec{b}\|$.

解 $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$

$$=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=650+2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$$

$$=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=650-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\therefore 2\vec{a}\cdot\vec{b}=-250,$$

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=400,\ \|\vec{a}+\vec{b}\|=20.$$

例2. $\vec{a}=(-2,2,1),\vec{b}=(1,3,-3),\vec{c}=(3,-4,12),$

$\vec{d}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}+(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$，求 $\mathrm{Pr}\,j_{\vec{c}}\vec{d}$.

解 $\vec{d}=(-6-8+12)(1,3,-3)+(-2+6-3)(3,-4,12)$

$=(1,-10,18),$

$$\mathrm{Pr}\,j_{\vec{c}}\vec{d}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{\|\vec{c}\|}=\frac{259}{13}$$

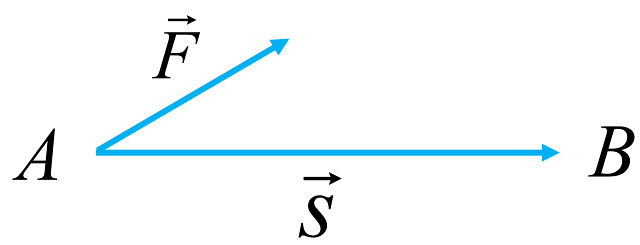
例3. 内积的物理意义

一质点在力F的作用下从点A移动到B，力所做的功.

记$\vec{s} = AB$,则

$$W = \|\vec{s}\|\|\vec{F}\|\cos\langle \vec{s}, \vec{F} \rangle$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{s}.$$



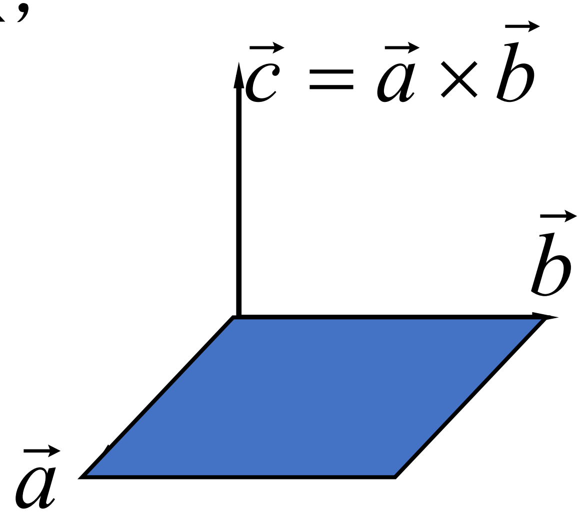
二. 外积

定义：向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的外积$\vec{a}\times\vec{b}$是一个向量，

(1) $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin<\vec{a},\vec{b}>$,

(2) $\vec{a}\times\vec{b}$与$\vec{a}$，$\vec{b}$所确定的平面垂直，

且$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{b}$符合右手系。



外积又称为向量积.

外积的性质

(1) $\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b},\ \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b};$

(2) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0},\ \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0};$

(3) $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0};$

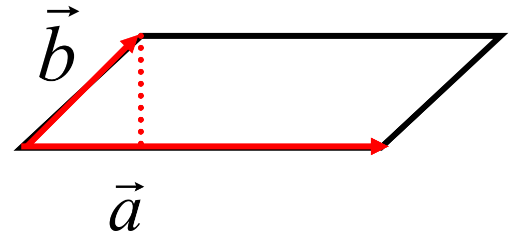
(4) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a};$

(5) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b});$

(6) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$

外积

外积的几何意义



$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin<\vec{a},\vec{b}>$$

$$= \|\vec{a}\|h$$

$$= \text{以}\vec{a},\vec{b}\text{为邻边的平行四边形的面积}$$

基向量的外积

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1,$$

$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}, \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j},$$

$$\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i},\ \vec{j}\times\vec{k} = -\vec{i}.$$

利用坐标计算外积

设$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$,则

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}) \\
&= a_1b_2\vec{k}-a_1b_3\vec{j}-a_2b_1\vec{k}+a_2b_3\vec{i}+a_3b_1\vec{j}-a_3b_2\vec{i} \\
&= (a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

外积

例2 求与 $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ 都垂直的单位向量。

解

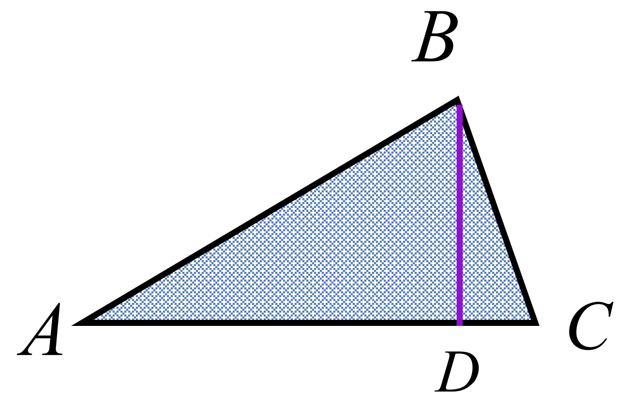
$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=10\vec{j}+5\vec{k}$$

$$\because \|\vec{c}\|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5},$$

$$\therefore \vec{e}_{\vec{c}}=\pm\frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}\right).$$

例3 在顶点为$A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$和$C(1,3,-1)$的三角形中，求AC边上的高BD.

解 $AC=(0,4,-3),\ AB=(4,-5,0)$



三角形ABC的面积为

$$S=\frac{1}{2}\|\vec{AC}\times\vec{AB}\|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\frac{25}{2}$$

$$\|\vec{AC}\|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5,\quad S=\frac{1}{2}\|\vec{AC}\|\cdot\vec{BD}$$

$$\frac{25}{2}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot BD\qquad \therefore BD=5.$$

例4 设单位向量OA与三个坐标轴夹角相等，B是点$M(1,-3,2)$关于$N(-1,2,1)$的对称点. 求$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$.

解 设α,β,γ是$\overrightarrow{OA}$的方向角，则

$$\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

由 $\alpha=\beta=\gamma$可得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=3\cos^2\alpha=1.$$

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$OA=\pm(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

设点*B*的坐标是*(x, y, z)*,则点*N*是*MB*的中点， 且

$$\frac{x+1}{2}=-1,\ \frac{y-3}{2}=2,\ \frac{z+2}{2}=1.$$

$$x=-3,\ y=7,\ z=0.$$

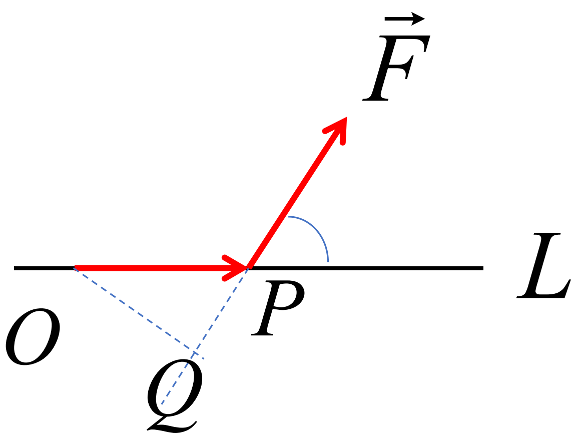
$$\overrightarrow{OB}=(-3, 7, 0),$$

$$OA\times OB=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -3 & 7 & 0 \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(-7,-3,10).$$

例5 外积的物理意义

设O为一杠杆L的支点，有一力$\vec{F}$作用在这杠杆上的P点处。力F与OP的夹角为θ。力$\vec{F}$对支点O的力矩是一向量$\vec{M}$, 它的模

$$\|\vec{M}\| = \|OQ\|\|\vec{F}\| = \|OP\|\|\vec{F}\|\sin\theta$$



$\vec{M}$的方向垂直于OP与$\vec{F}$所决定的平面，指向符合右手系

三、混合积

定义 设已知三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, 数量$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$称为这三个向量的混合积，记为$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$.

设 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$,

$\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$,

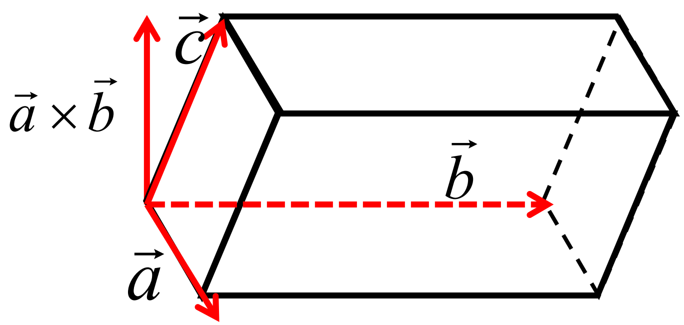
$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

这是**混合积的坐标表达式**

混合积

混合积的几何意义与性质：

(1)向量的混合积$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$是这样的一个数，它的绝对值表示以向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱的平形六面体的体积



(2) $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$

(3) 三向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面$\ll==\gg$ $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0$

混合积

例6 已知$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=2$，计算$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

解 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$$=[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}$$

$$+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}_{=0}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{a}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}$$

$$=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=4.$$

例7 已知不在一平面上的四点A(x_1,y_1,z_1)，B(x_2,y_2,z_2)，C(x_3,y_3,z_3)，D(x_4,y_4,z_4)，求四面体的体积。

解 由立体几何知，四面体的体积等于以向量$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$为棱的平形六面体的体积的六分之一.

$$V=\frac{1}{6}\left|[AB\ AC\ AD]\right|$$

$$\because\quad AB=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

$$\overrightarrow{AD} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)$$

$$\therefore V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

式中正负号的选择和行列式的符号一致.

学会了什么

内积

外积

混合积