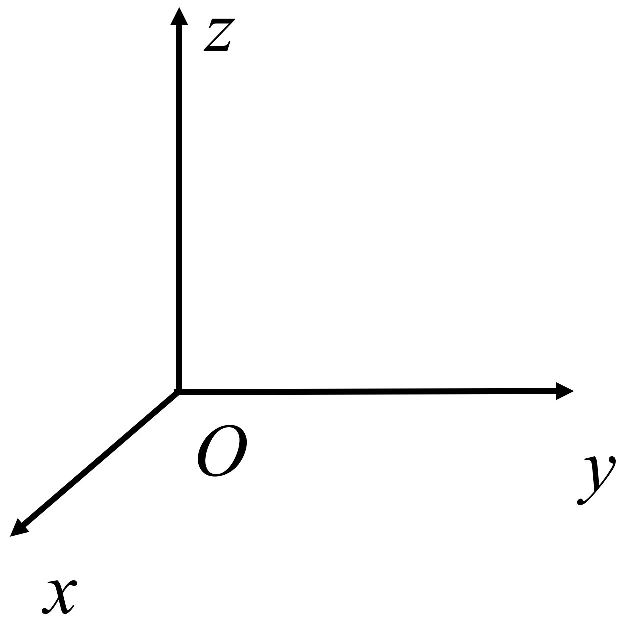
3.1 空间直角坐标系

主要内容：

- 空间直角坐标系
- 向量的概念
- 向量的线性运算
- 向量在轴上的投影
- 线性运算的几何意义
- 向量的模与方向余弦

一、空间直角坐标系

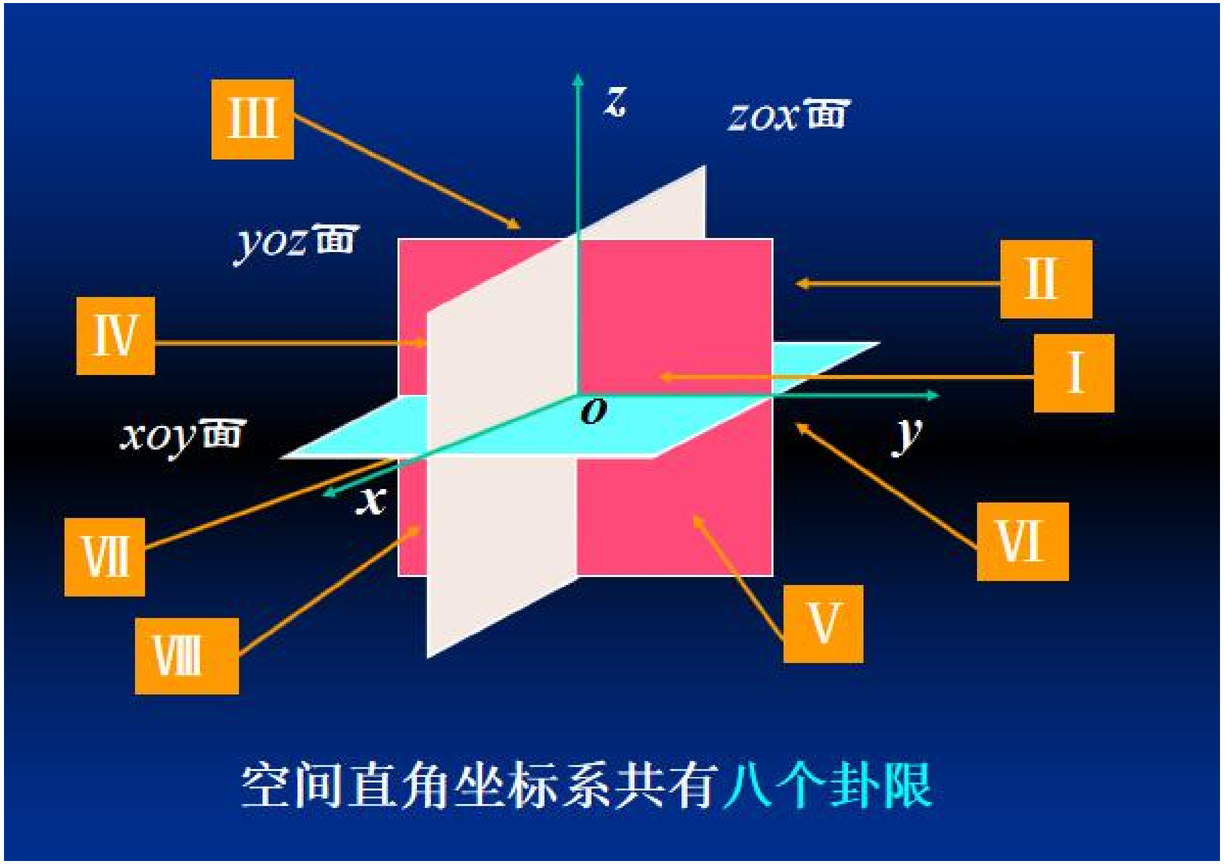
三个坐标轴的正方向符合右手系.



即右手握住z轴，当右手的四个手指从正向x轴转向正向y轴时，大拇指的指向就是Z轴的正向

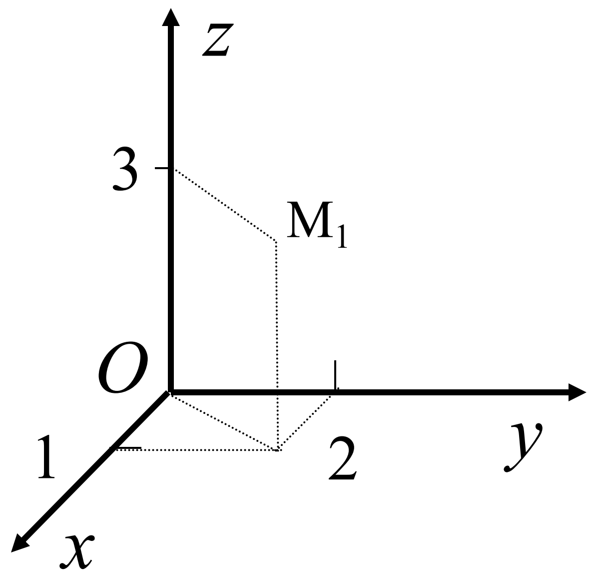
x轴:横轴；y轴：纵轴；z轴：竖轴

空间直角坐标系与向量

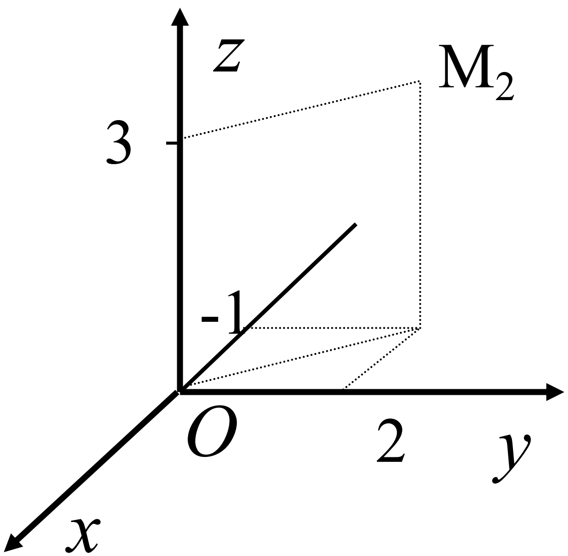


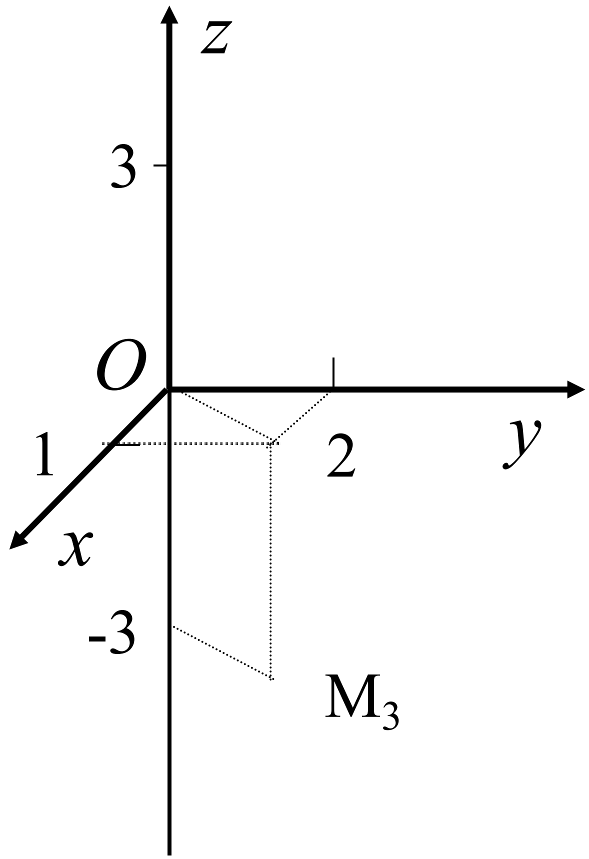
例　在O—xyz坐标系中表示以下三个点：

$M_1(1,\ 2,\ 3)$，$M_2(-1,\ 2,\ 3)$，$M_3(1,\ 2,\ -3)$.

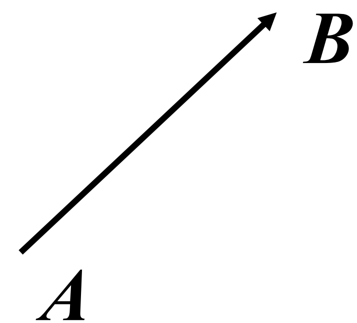


空间直角坐标系与向量





二. 向量的概念



向量：既有大小又有方向的量.

向量的表示：$\vec{a}$或 $\overrightarrow{AB}$

以A为起点，B为终点的有向线段.

向量的模：向量的大小. $\|\vec{a}\|$或 $\|\overrightarrow{AB}\|$

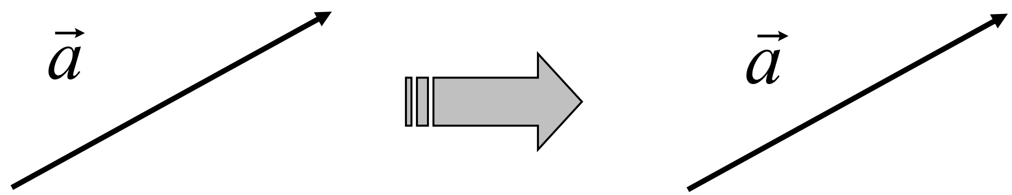
（模又称为长度或范数）.

单位向量：模为1的向量.

零向量：模为0的向量.

向量的概念

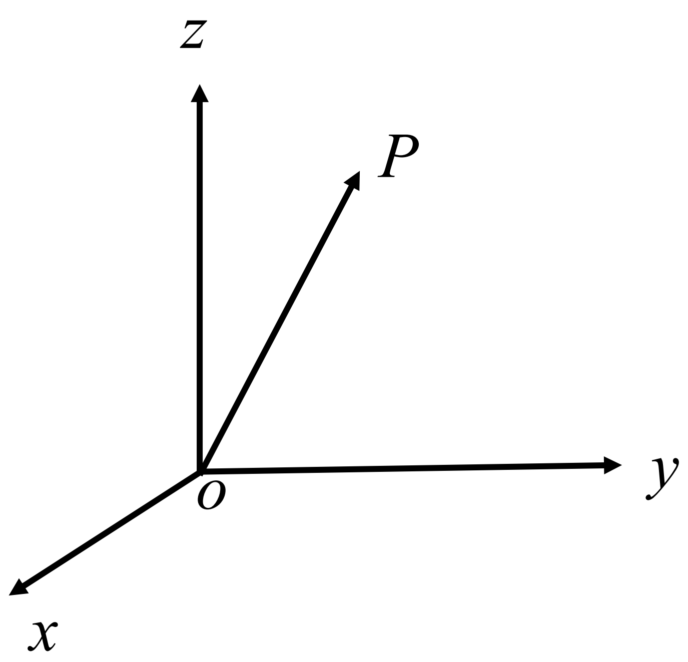
自由向量： 不考虑起点位置的向量



相等向量： 大小相等且方向相同的向量

负向量： 大小相等但方向相反的向量

向径：空间直角坐标系中任一点 P 与原点构成的向量. $\overrightarrow{OP}$



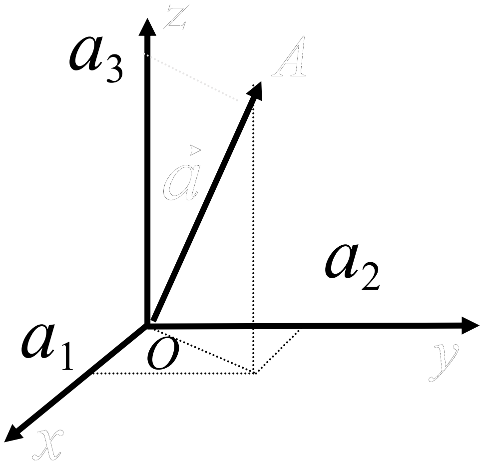
三、向量的线性运算

1. 向量的分量：

把向量 $\vec{a}$ 作平行移动，使其起点与原点重合。

设其终点A的坐标为(a_1, a_2, a_3), 则称a_1, a_2, a_3为向量 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ 的分量或坐标,

记为 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$.



2. 向量的线性运算

定义 设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, b_3)$,

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3),$$
$$k\cdot\boldsymbol{\alpha}=(ka_1, ka_2, ka_3).$$

$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$称为***加法***, $k\cdot\boldsymbol{\alpha}$称为***数乘***.

加法与数乘统称为**线性运算**.

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$$
$$=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3).$$

3. 线性运算满足的运算规律

- (1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;
- (2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;
- (3) $\alpha+0=\alpha$;
- (4) $\alpha+(-\alpha)=0$;
- (5) $1\alpha=\alpha$;
- (6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;
- (7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;
- (8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

4. 基向量与线性表出

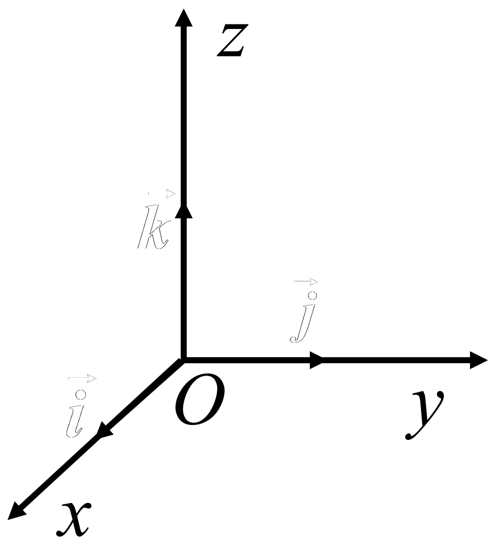
$$\vec{i}=(1,0,0),\ \vec{j}=(0,1,0),\ \vec{k}=(0,0,1)$$

单位向量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 称为基向量.

$$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$$
$$=(a_1, 0,0)+(0, a_2, 0)+(0, 0, a_3)$$
$$=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

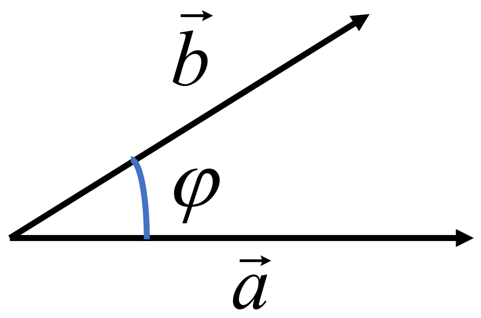
称 $\vec{a}$ 可由 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 线性表出。

$a_1\vec{i}$称为向量$\vec{a}$在x轴上的分向量



四、向量在轴上的投影

1. 空间两向量的夹角的概念：



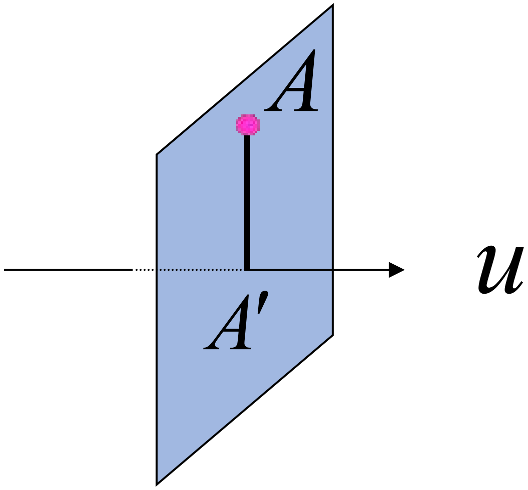
$\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$,向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的夹角为：

$$\varphi = <\vec{a},\vec{b}> = <\vec{b},\vec{a}> \ (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

类似地，可定义**向量与一轴**或**空间两轴**的夹角.

特殊地，**当两个向量中有一个零向量时**，规定它们的夹角可在0与π之间任意取值.

2. 空间一点在轴上的投影

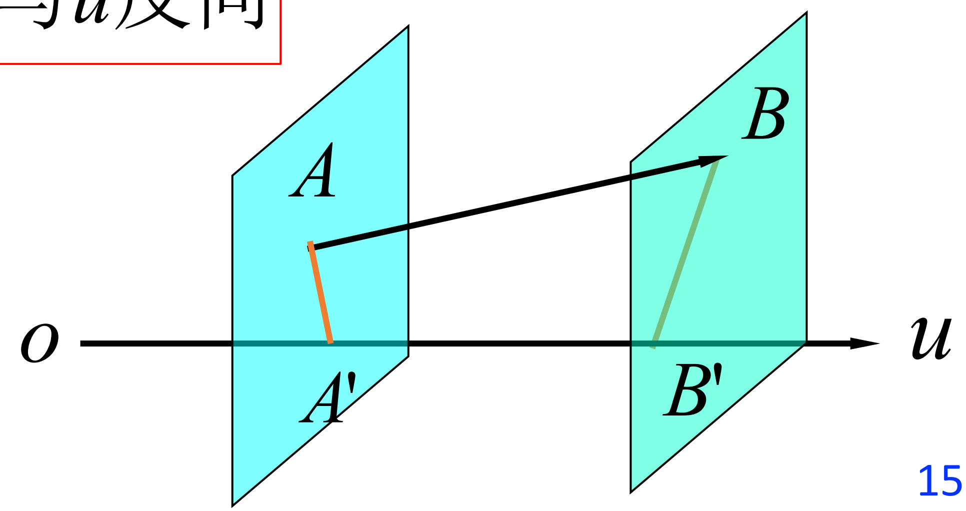


过点A作轴u的垂直平面，交点A'即为点A在轴u上的投影。

3. 向量在轴上的投影

过空间点*A*,*B*作平面与轴 *u*垂直，与轴 *u*相交于*A'*, *B'*,向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 *u*上的投影定义为

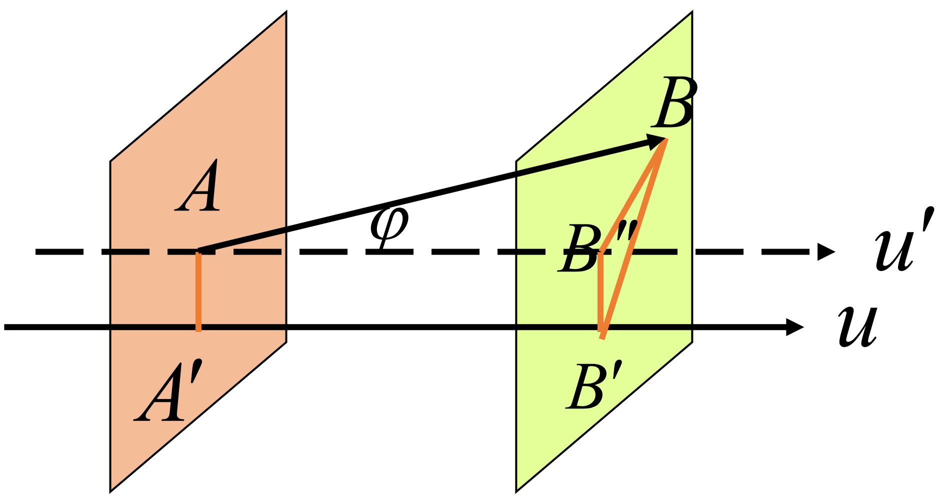
$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = \begin{cases} \| A'B' \|, A'B' 与 u 同向 \\ -\| A'B' \|, A'B' 与 u 反向 \end{cases}$$



向量在轴上的投影有以下两个性质：

(1) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角的余弦：$\Pr j_u \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| \cos\varphi$

证



$$\Pr j_u AB = \Pr j_{u'} AB$$
$$= \| AB \| \cos\varphi$$

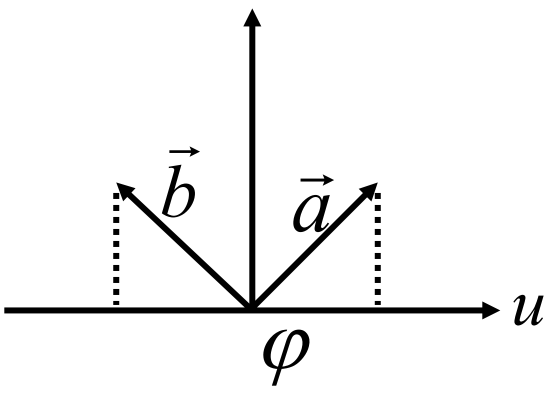
由性质1容易看出：

(1) $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$,投影为正

(2) $\frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$,投影为负

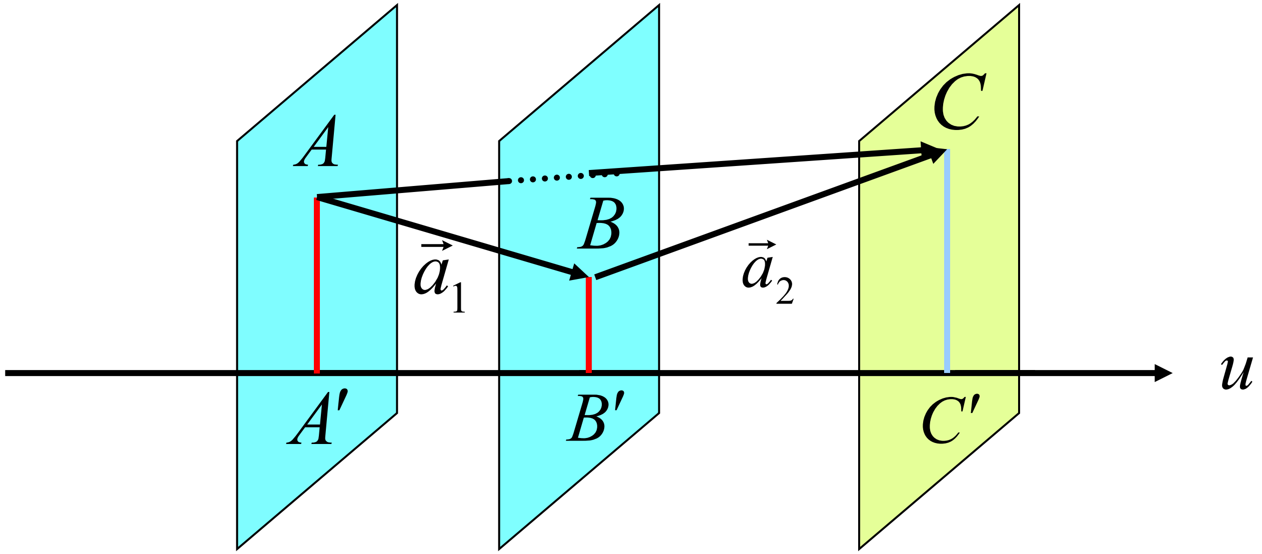
(3) $\varphi = \frac{\pi}{2}$,投影为零

(4) 相等向量在同一轴上投影相等；



（2）两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上投影之和（可推广到有限多个）

$$\mathrm{Pr}\,j_u(\vec{\boldsymbol{a}}_1+\vec{\boldsymbol{a}}_2)=\mathrm{Pr}\,j_u\vec{\boldsymbol{a}}_1+\mathrm{Pr}\,j_u\vec{\boldsymbol{a}}_2.$$



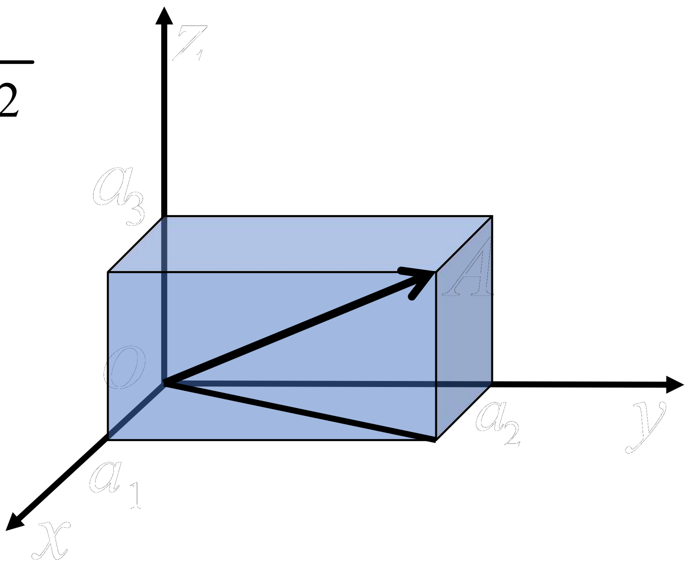
向量$\overrightarrow{OA}$的坐标a_1, a_2, a_3分别是 $\overrightarrow{OA}$ 在三个坐标轴上的投影.

利用勾股定理从图中可得

$$\|\boldsymbol{OA}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\|k\boldsymbol{OA}\| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2 + (ka_3)^2}$$

$$= |k| . \|\overrightarrow{OA}\|$$



五. 线性运算的几何意义

设 $\vec{OA}=(a_1,a_2),\ OB=(b_1,b_2)$, 则

$$\vec{OA}+\vec{OB}=(a_1+b_1,a_2+b_2)=\vec{OP},$$

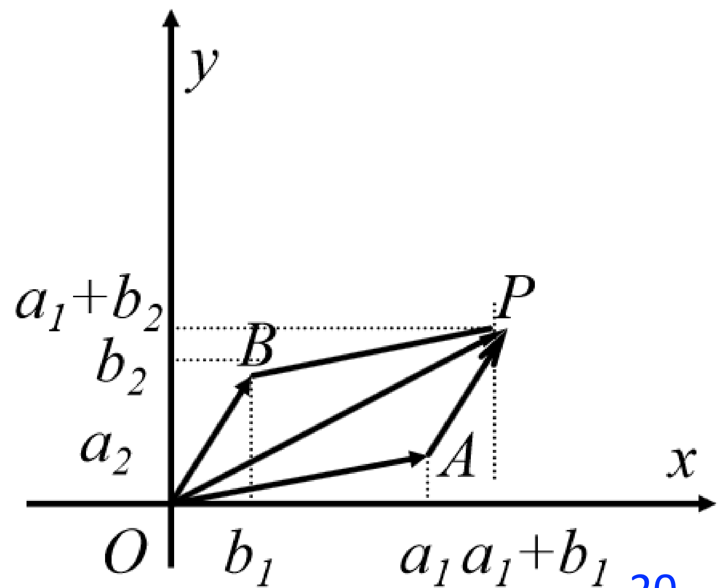
$$\mathrm{Pr}\,j_{Ox}BP=a_1+b_1-b_1=a_1$$

$$\mathrm{Pr}\,j_{oy}BP=a_2+b_2-b_2=a_2$$

$\vec{BP}$ 经平行移动后可与 $\vec{OA}$ 重合.

故 $\vec{BP}//\vec{OA}$,同理 $\vec{AP}//\vec{OB}$

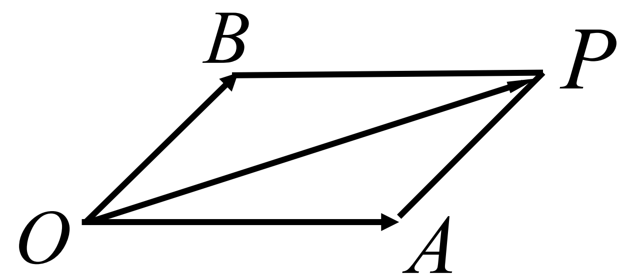
所以，***OAPB***是平行四边形.



线性运算的几何意义

1. 平行四边形法则

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP},$$



$\overrightarrow{OP}$ 是以 $\overrightarrow{OA}$ ，$\overrightarrow{OB}$ 为边的平行四边形的对角线.

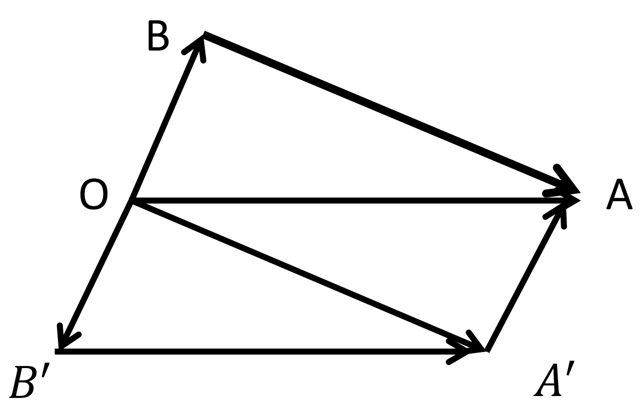
$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}.$$

平行四边形法则也可表示为三角形法则。

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB'}$$

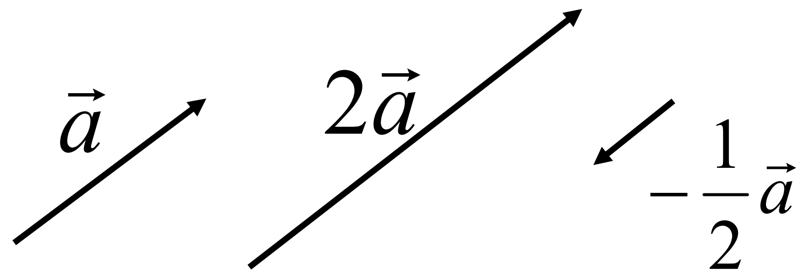
$$=\overrightarrow{OA'}$$

$$=\overrightarrow{BA}$$



线性运算的几何意义

2. 伸缩变换



（1） $\vec{b} = \lambda\vec{a}$

（2） $\lambda > 0, \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向；

（3） $\lambda < 0, \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向.

（4） $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = \lambda(a_1, a_2, a_3) = \lambda\vec{a}$

（5） $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2} = \dfrac{b_3}{a_3}$.

(若 $a_i = 0$, 则 $b_i = 0$).

线性运算的几何意义

例1. 非零向量单位化.

设向量$\vec{a} \neq 0$,令 $\vec{e}_a = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$,则

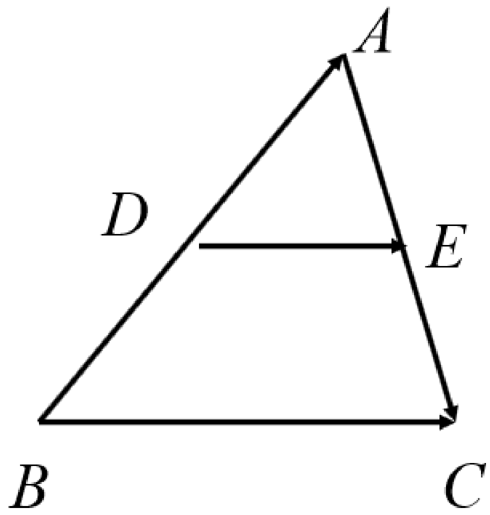
$$\|\vec{e}_a\| = \left|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\right| \cdot \|\vec{a}\| = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\|\vec{a}\| = 1$$

$\vec{e}_a$ 是与 $\vec{a}$同方向的单位向量.

例2. **证明：** 三角形的中位线平行于底边且等于底边的一半.

证 设DE是中位线，

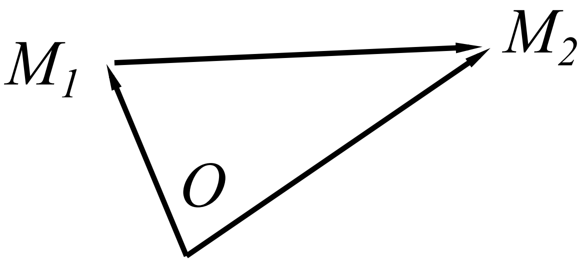
$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$



例3. 设$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间二点.

(1) 求 $\|M_1M_2\|$;

解.



$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

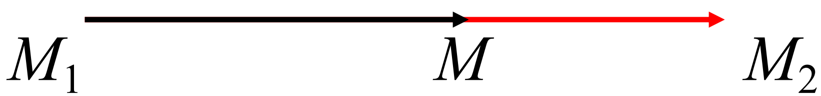
$$\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

这就是**空间两点间的距离公式**.

线性运算的几何意义

（2）设M为$\overrightarrow{M_1M_2}$上一点，$\dfrac{\|M_1M\|}{\|MM_2\|}=\lambda$，求$M$的坐标.

解.



设M的坐标为(x, y, z)，由$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$得，

$$(x-x_1, y-y_1, z-z_1)=\lambda(x_2-x, y_2-y, z_2-z)$$

$$x-x_1=\lambda(x_2-x), \qquad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

同理，$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$，$z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

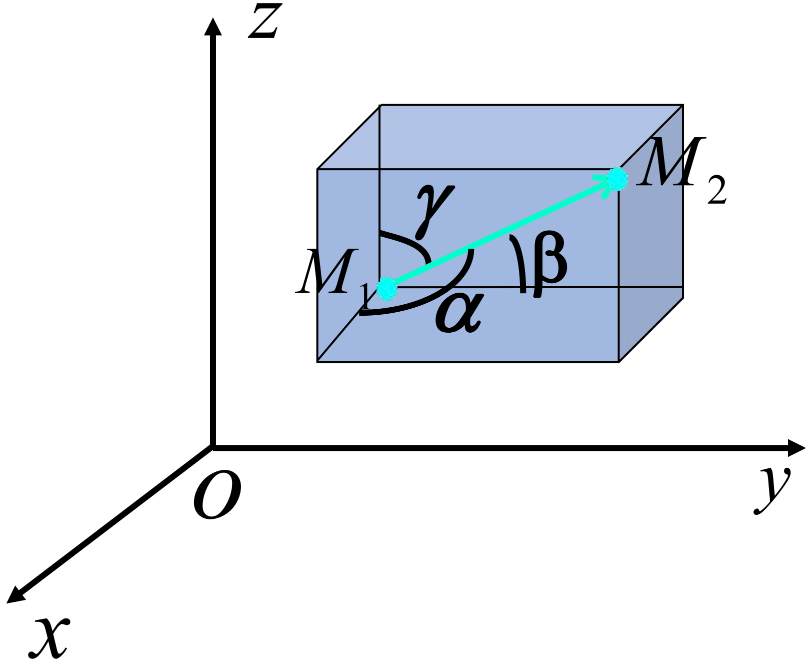
若M为M_1M_2的中点，则M的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

六、向量的模与方向余弦

非零向量 $\vec{a}$ 与三条坐标轴的正向的夹角称为**方向角**.

$$\alpha = <\vec{a}, \vec{i}>, \beta = <\vec{a}, \vec{j}>, \gamma = <\vec{a}, \vec{k}>,$$



$$0 \le \alpha \le \pi,$$

$$0 \le \beta \le \pi,$$

$$0 \le \gamma \le \pi.$$

向量的模与方向余弦

由图示可知

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}}$$

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$称为向量 $\vec{a}$ 的方向余弦

向量的模与方向余弦

方向余弦的特征

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$$

特殊地： 单位向量的方向余弦为

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

例4 设有向量$\overrightarrow{P_1P_2}$, 已知其模长为2，它与x轴和y轴的夹角分别为$\frac{\pi}{3}$和$\frac{\pi}{4}$，如果P_1的坐标为$(1,0,3)$，求P_2的坐标

解： 设$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向角分别为α，β，γ则

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\cos\alpha=\frac{1}{2},\beta=\frac{\pi}{4},\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

$$\therefore \cos\gamma=\pm\frac{1}{2}.$$

设P_2的坐标为(x, y, z)，

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x-1, y-0, z-3)$$

$$= \| \overrightarrow{P_1P_2} \| (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$= 2(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{1}{2}) = (1, \sqrt{2}, \pm 1)$$

$$\therefore x = 2, y = \sqrt{2}, z = 4\text{或}2$$

$$\therefore P_2(2,\sqrt{2},4)\text{ 或 }(2,\sqrt{2},2)$$

向量的模与方向余弦

例4 设$\vec{m}=3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}$, $\vec{n}=2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}$, $\vec{p}=5\vec{i}+1\vec{j}-4\vec{k}$,

求向量$\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$在$x$轴上的投影及在$y$轴上的分量。

解 $\because \vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$

$$=4(3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k})+3(2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k})-(5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})$$

$$=13\vec{i}+7\vec{j}+15\vec{k},$$

所以在x轴的投影为$a_1=13$,

在y轴上的分量为$7\vec{j}$.

你学到了什么

- 空间直角坐标系
- 向量的概念
- 向量的线性运算
- 向量在轴上的投影
- 线性运算的几何意义
- 向量的模与方向余弦