2.5 矩阵的秩

主要内容：

- 矩阵秩的概念
- 矩阵秩的计算
- 矩阵的标准形（分解）
- 三个证明例子

矩阵秩的概念

定义 矩阵A中非零子式的最高阶数r，称为A的秩，记为$\mathrm{R}(A) = r$.

显然对任意矩阵A， A的秩唯一，但其最高阶非零子式一般不唯一.

矩阵的秩的另一种理解：

设在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 k 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于 0，那末 D 称为矩阵A的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 A 的秩.

例1. 求矩阵的秩：

$$(1)\ A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix};\quad (2)\ B=\begin{pmatrix}2&4&8\\1&2&1\end{pmatrix};\ (3)\ C=\begin{pmatrix}1&2&4&1\\2&4&8&2\\3&6&2&0\end{pmatrix}$$

解. (1)、（2）易

(3) : C中所有3阶子式全为零，

可得 $R(A)=2.$

为什么 ？

思考：

若 $R(A)=r$, A的所有 r阶子式不为零 ？

所有 $r-1$阶子式不为零 ？

基本结论与性质：

1. $R(A)=0 \Leftrightarrow A=O$；

2. $R(A)\geq r \Leftrightarrow A$有一个$r$阶子式不为零；

3. $R(A)\leq r \Leftrightarrow A$的所有$r+1$阶子式全为零。

4. $R(kA)=\begin{cases}0, & k=0,\\ R(A), & k\neq 0.\end{cases}$

5. 设A为$m\times n$阶矩阵，则$0\leq R(A)\leq \min(m,n)$;

6. 对任意矩阵A，$R(A^T)=R(A)$;

7. n阶矩阵A可逆 $\Leftrightarrow R(A)=n$.

(满秩矩阵—可逆矩阵　　降秩矩阵—不可逆矩阵)

例2 求下列矩阵的秩：$A=\begin{pmatrix}2&-5&0&4&3\\0&1&1&0&5\\0&0&0&-2&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

解：

有三阶子式 $\begin{vmatrix}2&-5&4\\0&1&0\\0&0&-2\end{vmatrix}\neq 0$

所有四阶子式全为零，所以$R(A)=3.$

对于行阶梯形矩阵A，$R(A)=A$的非零行的行数

定理1 初等变换不改变矩阵的秩。

例3 求矩阵的秩：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4&1\\2&4&8&2\\3&6&2&0\end{pmatrix}$$

解

$$A\to\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&0&0&0\\0&0&-10&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&0&-10&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $R(A)=2.$

R(A) = r ⇔ 经行初等变换能将A化为具有r个非零行的行阶梯形矩阵.

例4

$$\text{设}A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1\\ 2 & -4 & 8 & 0\\ -2 & 4 & -2 & 3\\ 3 & -6 & 0 & -6\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

求矩阵A及矩阵$B=(A|b)$的秩.

解： **分析：**设 B 的行阶梯形矩阵为 $\widetilde{B}=(\widetilde{A},\widetilde{b})$，

则 $\widetilde{A}$ 就是 A 的行阶梯形矩阵，

故从 $\widetilde{B}=(\widetilde{A},\widetilde{b})$ 中可同时看出 $R(A)$ 及 $R(B)$.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3+2r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{\substack{r_2\div 2\\ r_3-r_2}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_3]{r_3\div 5}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore R(A)=2,\quad R(B)=3.$$

推论 对任意矩阵A,

$$R(PA)=R(AQ)=R(PAQ)=R(A),$$

其中P, Q分别为可逆矩阵.

证 因为Q可逆，存在初等矩阵$E_1, \ldots, E_t$使得

$$Q = E_1 \cdots E_t,$$

$$AQ = A E_1 \cdots E_t,$$

即 AQ 为A经列初等变换所得. 故 $R(AQ)=R(A)$.

同理可证其他.

矩阵的标准形（分解）

定理2 对任意矩阵$A_{m\times n}$,都存在可逆矩阵$P_{m\times m}$,$Q_{n\times n}$使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} Q, \quad R(A)=r$$

其中$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$称为$A$的标准形. 即任何矩阵都等价于其标准形.

即，存在可逆矩阵K,S使得 $KAS=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$，$R(A)=r$

矩阵的标准形（分解）

(问：矩阵等价的充要条件是什么？)

(A与B等价$\Leftrightarrow$存在可逆的P, Q使得 $A=PBQ$)

证. $A \xrightarrow{\text{行初等变换}}$ 简化行阶梯形 $\xrightarrow{\text{列交换}} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

$r = R(A)$. （为什么？）

存在初等矩阵$E_1,\dots, E_k; F_1,\dots, F_s$使得

$$(E_k \cdots E_1)A(F_1 \cdots F_s) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

存在可逆矩阵$K = E_1,\ldots, E_k; S = F_1,\ldots ,F_s$使得

$$KAS = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

推论 同型矩阵A与B等价的充要条件是R(A)=R(B).

例5 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$ 求A的标准形.

解：

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(\boldsymbol{A}) = 2.$$

$$\text{则}A\text{的标准形为}\begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

三个证明例子

例6 设A为n阶矩阵($n\geq 2$)，证明 $R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n, \\ 0, & R(A)<n-1. \end{cases}$

证 ①若R(A)=n:

$$\det A\neq 0, \qquad AA^*=(\det A)I,$$

$$|A||A^*|=|(\det A)I|=|A|^n\neq 0,$$

所以 $|A^*|\neq 0$, 即 $R(A^*)=n$.

② $\mathrm{R}(A) < n$-1： A中所有n-1阶子式均为零，

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = O, \qquad R(A^*) = 0.$$

三个证明例子

例7 证明

$$R\left(\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\right) = R(A) + R(B).$$

证 设$R(A) = r_1,\ R(B) = r_2$. 存在可逆矩阵P_1, P_2, Q_1, Q_2使得

$$A = P_1\begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}Q_1,\quad B = P_2\begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix}Q_2,$$

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1\begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}Q_1 & O \\ O & P_2\begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix}Q_2 \end{pmatrix}$$

三个证明例子

$$=\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} & O \\ O & \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix}$$

可逆矩阵，
为什么？

所以，$\text{秩}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=\text{秩}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} & O \\ O & \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{pmatrix}=r_1+r_2.$

例8 设 A 为任一实矩阵, $R(A^T A)$与$R(A)$是否相等?

证 因为对于任一实向量$x \neq 0$,

当$Ax = 0$时，必有$A^T Ax = 0$,

反之当$A^T Ax = 0$时,有 $x^T A^T Ax = 0$

即 $(Ax)^T(Ax) = 0 \Rightarrow Ax=0;$

由此可知 $Ax = 0$与$A^T Ax = 0$同解,

故 $R(A^T A) = R(A).$

Tip: 根据第四章齐次线性方程组基础解系性质

学到了什么？

矩阵秩的概念

矩阵秩的计算

矩阵的标准形

三个证明例子