2.2 行列式的性质与计算

主要内容：

- 行列式的性质
- 行列式的计算
- 方阵乘积的行列式

一. 行列式的性质

性质1 行列式按任一行展开，其值相等，即

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

其中 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, M_{ij}为划去A的第i行第j列后所得的$n-1$阶行列式，A_{ij}称为a_{ij}的代数余子式。

例1 $D=\begin{vmatrix}4&0&0&1\\2&-1&3&1\\0&0&0&2\\7&4&3&2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}4&0&0\\2&-1&3\\7&4&3\end{vmatrix}=-2\times4\begin{vmatrix}-1&3\\4&3\end{vmatrix}$

$=-2\times4\times(-15)$

例2 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解

$$D_n = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= a_{nn}a_{n-1,n-1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-2} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理

$$D_n = \begin{vmatrix} & * & & a_n \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$$

行列式的性质

推论 若行列式的某一行全为零，则行列式等于零.

性质2 n阶行列式某两行对应元全相等，则行列式为零.
即当 $a_{ik} = a_{jk}$， $i \neq j, k=1,\ldots,n$时， $\det A = 0$.

证 （归纳法）结论对二阶行列式显然.

设结论对$n-1$阶行列式成立，对于n阶：按第$k(\neq i, j)$行展开

$$\det A = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}, \quad (k \neq i, j)$$

由于$M_{kl}(l=1, \ldots, n)$是$n-1$阶行列式，且其中都有两行元全相等，所以

$$A_{kl} = 0 \quad (k = 1,\ldots,n), \text{ 故} \det A = 0.$$

行列式的性质

性质3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 $左 \overset{\text{按第}i\text{行展开}}{=} (b_{i1}+c_{i1})A_{i1}+\cdots+(b_{in}+c_{in})A_{in}$

$$=(b_{i1}A_{i1}+\cdots+b_{in}A_{in})+(c_{i1}A_{i1}+\cdots+c_{in}A_{in})$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的性质

例3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1+4 & 2+5 & 3+6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

观察：与矩阵加法的区别？

性质4（行列式的初等变换）若把行初等变换施于n阶矩阵**A**上：

（1） 将**A**的某一行乘以数k得到$\mathbf{A}_1$，则

$$\det\mathbf{A}_1 = k(\det\mathbf{A});$$

（2） 将**A**的某一行的$k(\neq 0)$倍加到另一行得到$\mathbf{A}_2$，则

$$\det\mathbf{A}_2 = \det\mathbf{A};$$

（3） 交换**A**的两行得到$\mathbf{A}_3$，则 $\det\mathbf{A}_3 = -\det\mathbf{A}$.

证 (1) 按乘以数k的那一行展开，即得结论成立。

(2)

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \det A + k \cdot 0 = \det A$$

（3）

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{c} j\text{行} \\ = \\ i\text{行} \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+a_{i1} & \cdots & a_{jn}+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的性质

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{i1} & \cdots & -a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+a_{i1} & \cdots & a_{jn}+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{i1} & \cdots & -a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
=-\det A
$$

推论 若行列式某两行对应元成比例，则行列式的值为零.

应 用:

1. 设A为n阶矩阵，则 $\det(kA)=k^n(\det A)$.
2. 初等矩阵的行列式:

$$\det(E_{ij})=\det(E_{ij}I)=-\det I=-1$$

$$\det E_i(c)=c\neq 0;$$

$$\det E_{ij}(c)=1.$$

初等矩阵与任一方阵A乘积的行列式：

$$\det(E_{ij}A) = -\det A = (\det E_{ij})(\det A),$$

$$\det(E_i(c)A) = c(\det A) = (\det E_i(c))(\det A),$$

$$\det(E_{ij}(c)A) = \det A = (\det E_{ij}(c))(\det A).$$

对任一初等矩阵E， $\det(EA) = (\det E)(\det A)$

设$E_1, E_2, \cdots, E_t$为初等矩阵，则

$$\det(E_1E_2\cdots E_tA) = (\det E_1)\cdots(\det E_t)(\det A)$$

例4 求矩阵A的行列式|A|，2|A|和|2A|

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$$

解：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&3\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-2&-3\\0&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-2&-3\\0&0&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=1$$

行列式的性质

$$2|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = 2$$

$$|2A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

注意: $2|A| \neq |2A|$

一般，

$$\left| kA_{n\times n} \right| = k^n |A| \neq |k A|.$$

性质5 设A为n阶矩阵，则

$$\det(A^T) = \det A.$$

证 当A不可逆时：

设 $A \xrightarrow{\text{初等行变换}} R$(最后一行的元全为零)

即存在初等矩阵 $E_1, E_2, \ldots, E_t$,

$$A = E_1 E_2 \cdots E_t R$$

$$\det R = 0 \;\Rightarrow\; \det A = (\det E_1)\cdots(\det E_t)(\det R) = 0.$$

又A不可逆$\Leftrightarrow A^T$不可逆 所以 $\det A^T = 0$

当A可逆时： 存在初等矩阵 $E_1, E_2, ..., E_s$,

$$有 A = E_1E_2\cdots E_s$$

$$\det(A^T) = \det(E_s{}^T\cdots E_2{}^T E_1{}^T)$$

$$= (\det E_s{}^T)\cdots(\det E_2{}^T)(\det E_1{}^T)$$

$$= (\det E_s)\cdots(\det E_2)(\det E_1)$$

$$= (\det E_1 \det E_2 \cdots \det E_s)$$

$$= \det A$$

由性质5，$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = 1,...,n$

例5. 奇数阶反对称阵的行列式必为零.

证 设$A_{n\times n}$ (n为奇数)满足:

$$A^T = -A,$$

于是，$\det A = \det A^T = \det(-A)$

$$= (-1)^n \det A = -\det A,$$

例6 计算4阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

(已知 $abcd=1$)

解:

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & a & \dfrac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \dfrac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \dfrac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \dfrac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a^2} & a & \dfrac{1}{a} & 1 \\ \dfrac{1}{b^2} & b & \dfrac{1}{b} & 1 \\ \dfrac{1}{c^2} & c & \dfrac{1}{c} & 1 \\ \dfrac{1}{d^2} & d & \dfrac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

行列式的性质

$$= abcd\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

$$= 0.$$

行列式性质小结：

一、按行展开： $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$

二、三类初等变换：

1. 换行反号， 2. 倍乘， 3. 倍加.

三、三种为零：1. 有一行全为零， 2. 有两行相同，
3. 有两行成比例 .

四、一种分解

五、 $D^T = D$.

例7. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$，求 $\det A$.

解.

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 10 & -17 \\ 0 & -2 & 23 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 10 & -17 \\ 0 & 0 & \dfrac{196}{10} \end{vmatrix}=196$$

例8. 计算 $D=\begin{vmatrix}1 & 4 & -1 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\\ 4 & 2 & 3 & 11\\ 3 & 0 & 9 & 2\end{vmatrix}$

解.

i) -2*r2+r3; ii) -4*r2+r1

$$D=\begin{vmatrix}-7 & 0 & -17 & -8\\ 2 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & -5 & 5\\ 3 & 0 & 9 & 2\end{vmatrix}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-7 & -17 & -8\\ 0 & -5 & 5\\ 3 & 9 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-7 & -25 & -8\\ 0 & 0 & 5\\ 3 & 11 & 2\end{vmatrix}=-5\cdot\begin{vmatrix}-7 & -25\\ 3 & 11\end{vmatrix}=10$$

例9. 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y \\ y & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解.

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)y & y & \cdots & y \\ x+(n-1)y & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x+(n-1)y & y & \cdots & x \end{vmatrix} = (x+(n-1)y)\begin{vmatrix} 1 & y & \cdots & y \\ 1 & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=(x+(n-1)y)\begin{vmatrix} 1 & y & \cdots & y \\ 0 & x-y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-y \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)y](x-y)^{n}$$

例10. 证明范德蒙行列式($n\geqslant 2$)

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n} (x_i - x_j),$$

证.

$n = 2$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$，结论成立。

设对于n–1阶结论成立，对于n阶：

Tip： 从最后一行开始，上一行乘以-x_1分别加到下一行

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

行列式的计算

n-1阶范德蒙行列式

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{2\le j<i\le n}(x_i - x_j) = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j)$$

例11

$$D=\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 \\ b & b^2 & b^3 & b^4 \\ c & c^2 & c^3 & c^4 \\ d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}=abcd\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}=abcd\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$=abcd\,(d-c)(d-b)(c-b)(d-a)(c-a)(b-a)$$

例12. 计算

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

解. 加边法

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

行列式的计算

$$
=\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1+\sum_{i=1}^{n} a_i
$$

（再考虑例9？）

解决： 1.可逆矩阵与行列式；
2.矩阵乘积的行列式.

定理1. 方阵A可逆的充要条件为 $\det A \neq 0$.

证. $A \xrightarrow{\text{行初等变换}} R$（简化行阶梯形）

即存在初等矩阵$E_1, \ldots, E_t$使得 $A = E_1 \cdots E_t R$

$\Leftarrow$：已知$\det A \neq 0$. 若A不可逆，

则R的最后一行的元全为零，所以$\det R = 0$.

方阵乘积的行列式

$$\det A = (\det E_1)\cdots(\det E_t)(\det R) = 0, \text{矛盾.}$$

$\Rightarrow$：若A可逆，则$R=I$,

$$\det A = (\det E_1)\cdots(\det E_t)(\det I) \neq 0.$$

方阵乘积的行列式

定理2. 设A, B为n阶方阵，则

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

证. 设$A \xrightarrow{\text{行初等变换}} R$（简化行阶梯形）

即存在初等矩阵$E_1, \ldots, E_t$使得 $A = E_1 \cdots E_t R$

$$\det(AB) = \det(E_1 \cdots E_t RB)$$

$$= (\det E_1) \cdots (\det E_t)(\det(RB)).$$

若A可逆，则$R = I$,

方阵乘积的行列式

$$\det(AB) = (\det E_1)\cdots(\det E_t)(\det(IB))$$

$$= (\det A)(\det B).$$

若$\boldsymbol{A}$不可逆，则$\boldsymbol{R}$的最后一行全为零, $\boldsymbol{RB}$的最后一行全为零.

$$\det(AB) = 0$$

$$(\det A)(\det B) = 0(\det B) = 0.$$

方阵乘积的行列式

推论1 设A_i（i=1，…，t）为n阶矩阵，则

$$\det(A_1A_2\cdots A_t)=(\det A_1)\cdots(\det A_t).$$

推论2 设A，B为n阶矩阵，且AB=I（或BA=I），则$B=A^{-1}$.

证 $\det(AB)=(\det A)(\det B)=\det I=1.$

所以 $\det A\neq 0.$ A可逆

$$A^{-1}AB=A^{-1}I=A^{-1}$$

$$B=A^{-1}$$

方阵乘积的行列式

应用： $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

Tip： $A^{-1}A=I$

例13 设 $AA^T=I$ 且 $|A|=-1$，证明：$|-I-A|=0$.

证：$|-I-A|=|-AA^T-A|$

$$=|A(-A^T-I)|$$

$$=|A||(-A-I)^T|$$

$$=-|-A-I|$$

$$=-|-I-A|$$

$$\therefore\quad |-I-A|=0.$$

例14　设

$$\Lambda=\begin{pmatrix}0&&&&\\&1&&&\\&&2&&\\&&&\ddots&\\&&&&n-1\end{pmatrix},\quad P^{-1}BP=\Lambda,\quad 求：|I+B|.$$

解：$B=P\Lambda P^{-1}$，

$$|I+B|=\left|I+P\Lambda P^{-1}\right|=\left|PIP^{-1}+P\Lambda P^{-1}\right|$$

$$=\left|P(I+\Lambda)P^{-1}\right|=|P||I+\Lambda|\left|P^{-1}\right|$$

方阵乘积的行列式

$$= |P|\left|P^{-1}\right||I + \Lambda| = |I + \Lambda|$$

$$= n\,!$$

思考题

设n阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$

求第一行各元素的代数余子式之和:

$$A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n}.$$

解 第一行各元素的代数余子式之和可以表示成

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right).$$

Tip： 从第2列开始乘以-1/2, -1/3, ….分别加到第1列

学到了什么？

行列式的性质

行列式的计算

方阵乘积的行列式