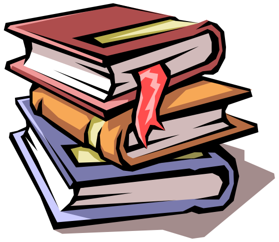
2. 1 n阶行列式的定义

主要内容:

一. 一、二、三阶行列式

二. n阶行列式的定义



一、二、三阶行列式

一阶行列式：$|a_{11}| = a_{11}$　　如，行列式 $|-5| = -5$，$|3| = 3$

二阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

如，$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3$

三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式计算式的记忆法

例如 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8+6+4=18$

$$\begin{matrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{matrix}$$

例1 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

解 按对角线法则，有

$$D = 1\times 2\times(-2)+2\times 1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times 4$$
$$-1\times 1\times 4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times 2\times(-3)$$

一、二、三阶行列式

例2 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$

解 方程左端

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12$$

$$= x^2 - 5x + 6,$$

由 $x^2 - 5x + = 0$ 解得

$$x = 2 \text{ 或 } x = 3.$$

二、三阶行列式计算式规律的观察：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + a_{12}(-1)a_{21} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |a_{22}|, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} |a_{21}|$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

称：

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$，分别为$a_{11},a_{12},a_{13}$的**代数余子式**

n阶行列式的定义

定义：定义n阶矩阵A的行列式 $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

(1) 当$n=1$时，$\det A = \det(a_{11}) = a_{11}$;

(2) 当$n \geq 2$时，

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

其中 $A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}$, M_{1j}为划去A的第1行第j列后所得的$n-1$阶行列式，

记号 $\det A$, $|A|$

n阶行列式的定义

行列式与矩阵的区别与联系 ：

(1) $D_{n\times n}$， $A_{m\times n}$；

(2) 数， 数表；

(3) $|\quad|$， $(\ )$， $[\ ]$；

(4) $A_{n\times n} \to |A| = \det A$.

例3 求 det$A$:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

解 $$\det A = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+7(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=(8+21)+3(4-9)+7(14+12)=196$$

例4 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & O & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解

$$D_n = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & O & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & & & \\ a_{43} & a_{44} & O & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理，$\det(\operatorname{diag}(\boldsymbol{a}_{11}, \boldsymbol{a}_{22}, \cdots, \boldsymbol{a}_{nn})) = \boxed{\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{22}\cdots\boldsymbol{a}_{nn}}$

$$\boxed{\det \boldsymbol{I} = 1, \qquad \det(k\boldsymbol{I}_n) = k^n}$$

例5 计算斜下三角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} & 0 & & a_n \\ & & \iddots & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & * & \end{vmatrix}$$

n阶行列式的定义

解:

$$D_n = a_n(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} & 0 & & a_{n-1} \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & * & \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}a_nD_{n-1}$$

$$= (-1)^{n-1}a_n(-1)^{n-2}D_{n-2}$$

$$= \cdots = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}a_na_{n-1}\cdots a_1$$

$$\boxed{= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n}$$

n阶行列式的定义

同理， $D_n = \begin{vmatrix} & 0 & & a_n \\ & & \iddots & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$

你学到了什么

一. 一、二、三阶行列式

二. n阶行列式的定义