1.3 逆 矩 阵

主要内容：

- 逆矩阵的概念与性质
- 用行初等变换求逆矩阵

一. 逆矩阵的概念与性质

？：矩阵A
A(?)=I

数$a \neq 0$：$a\,a^{-1} = a^{-1}\,a = 1$。

定义:设A为n阶矩阵，若存在n阶矩阵B，使得

$$AB = BA = I,$$

则称A为<u>可逆矩阵</u>，B为A的<u>逆矩阵</u>，记为$A^{-1} = B$.

若A可逆，则A^{-1}存在，且 $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I.$

一. 逆矩阵的概念与性质

1. 单位阵 I ： $I^{-1}=I$

2. 对角阵：

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix},\ (d_1,\dots,d_n\neq 0)\ ; \quad D^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$$

$$(kI)^{-1}=\frac{1}{k}I,\ (k\neq 0)$$

一．逆矩阵的概念与性质

定理1：设A可逆，　则它的逆是唯一的.

证：设有B 和 C 满足

$$AB = BA = I,\qquad AC = CA = I.$$

则 $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$

注意

若A，B均为方阵，且$AB = I$（或 $BA = I$），则A可逆且$B = A^{-1}$.

应用：

一. 逆矩阵的概念与性质

性质：设A, B 均为n阶可逆矩阵，数 $\lambda \neq 0$，则

1. A^{-1}可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A$;
2. λA可逆，且$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$;
3. AB可逆，且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
4. A^T可逆，且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

证 3：$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1}A^{-1}) = AA^{-1} = I$

所以AB可逆，且（AB）$^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4：$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I$

例1. 设方阵A满足$A^2 - A - 2I = O$, 证明:

(1) A和$I - A$都可逆，并求其逆矩阵;

(2) $A+I$ 和$A-2I$不同时可逆.

证: (1): $A(A-I)=2I$

$$A(\tfrac{1}{2}(A-I))=I$$

所以A可逆, 且$A^{-1}=\tfrac{1}{2}(A-I)$

$$(-\tfrac{1}{2}A)(I-A)=I$$

所以$I-A$可逆, 且$(I-A)^{-1}=-\tfrac{1}{2}A$

(2): $(A+I)(A-2I)=A^2-A-2I=O$

所以，A+I 和A-2I不同时可逆.

例2 设 $B^2=B$, $A=I+B$

证明：A可逆且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(3I-A)$.

证：$A\left[\frac{1}{2}(3I-A)\right]=\frac{3}{2}A-\frac{1}{2}A^2$

$$=\frac{3}{2}(I+B)-\frac{1}{2}(I+B)^2$$

$$=\frac{3}{2}I+\frac{3}{2}B-\frac{1}{2}\left(I^2+2B+B^2\right)$$

$$=\frac{3}{2}I+\frac{3}{2}B-\frac{1}{2}I-B-\frac{1}{2}B^2=I$$

$\therefore$ A 可逆且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(3I-A)$.

例3 矩阵 A 满足：$A^k=0$,

(1) 证明：$I-A$ 可逆；

(2) 求：$(I-A)^{-1}$.

分析：$(I-A)\bullet ?=I$.

解：$(I-A)\left(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}\right)$

$$=\left(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}\right)+\left(-A-A^2-\cdots-A^{k-1}-A^k\right)$$

$$=I-A^k=I$$

$\therefore$ $I-A$ 可逆且 $(I-A)^{-1}=I+A+\cdots+A^{k-1}$.

例4. 设A可逆，则

$$AX = b \text{有唯一解} X = A^{-1}b$$

$$AX = 0 \text{ 只有零解 } X = 0$$

问题：<u>初等矩阵可逆吗？其逆阵呢？</u>

为什么？

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij};\quad E_i^{-1}(c) = E_i(\tfrac{1}{c}), c \neq 0;\quad E_{ij}^{-1}(c) = E_{ij}(-c).$$

一. 逆矩阵的概念与性质

定理：设A为n阶矩阵，则下列各命题等价：

1. A是可逆的；
2. AX = 0只有零解；
3. A与I 行等价；
4. A可表为有限个初等矩阵的乘积.

证：1→2：显然（为什么？）

2→3：$A \xrightarrow{\text{行初等变换}} B$ (行阶梯形矩阵)

BX = 0只有零解.

B的对角元均非零。（否则B的最后一行元素全为0，则BX=0有非零解，矛盾！）

则，$B \xrightarrow{\text{行初等变换}} B$的行简化阶梯形$= I$

3→4：由条件，A可经行初等变换得I.

存在初等矩阵$E_1,\dots,E_k$，使得$E_k\cdots E_1A=I$

$$A=E_1^{-1}\cdots E_k^{-1}I=E_1^{-1}\cdots E_k^{-1}$$

4→1：显然（为什么？）

推论：设A为n阶矩阵，则AX = b有唯一解的充要条件是A可逆.

证 充分性： $AX=b$有唯一解$X=A^{-1}b$

必要性： 设AX = b有唯一解X，但A不可逆.

A不可逆⇒ AX = 0有非零解Z.

令Y=X+Z，则Y为AX = b的解，矛盾.

二. 用行初等变换求逆矩阵

求逆矩阵的简便方法

设A可逆,所以存在初等矩阵E_1, ⋯, E_k, 使得

$$E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = I$$

$$A^{-1} = E_k E_{k-1} \cdots E_1 = E_k E_{k-1} \cdots E_1 I$$

方法 $(A,\ I) \xrightarrow{\text{行初等变换}} (I,\ A^{-1})$

二. 用行初等变换求逆矩阵

例5. 求A的逆矩阵: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&3\end{pmatrix}.$

解

$$(A,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\1&3&3&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-4&-2&1&0\\0&1&0&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&-4&-5&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&\frac{5}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & -\frac{11}{4} & \frac{3}{4} & \frac{9}{4}\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\end{array}\right),$$

所以，$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}-3 & 3 & 1\\ -4 & 0 & 4\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}$

例6. 求A的逆矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&0&1\\0&4&-1\end{pmatrix}.$$

解

$$(A,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&1&1&0&0\\2&0&1&0&1&0\\0&4&-1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&1&1&0&0\\0&4&-1&-2&1&0\\0&4&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&1&1&0&0\\0&4&-1&-2&1&0\\0&0&0&2&-1&1\end{array}\right)$$

A不可逆

为什么？

例7 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$,

计算: (1) $(A+2I)^{-1}\left(A^2-4I\right)$, (2) $(A+2I)^{-1}(A-2I)$.

解: $(A+2I)^{-1}\left(A^2-4I\right)=(A+2I)^{-1}(A+2I)(A-2I)$

$$=A-2I=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3&0&0\\1&-3&0\\1&1&-3\end{pmatrix}.$$

二. 用行初等变换求逆矩阵

(2) $(A+2I)^{-1}(A-2I)=?$

$$(A+2I \vdots I)=\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&1&0&0\\1&1&0&\vdots&0&1&0\\1&1&1&\vdots&0&0&1\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&1&0&0\\0&1&0&\vdots&-1&1&0\\0&1&1&\vdots&-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&1&0&0\\0&1&0&\vdots&-1&1&0\\0&0&1&\vdots&0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$(A+2I)^{-1}(A-2I)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&0&0\\1&-3&0\\1&1&-3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3&0&0\\4&-3&0\\0&4&-3\end{pmatrix}.$$

例8 解矩阵方程：(1) $AX=B$，(2) $XA=B$.

$$A=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

解：(1) $A^{-1}AX=X=A^{-1}B$.

$$(A\ \ I)=\begin{pmatrix}2&2&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1&0\\2&2&3&1&0&0\\-1&2&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

二. 用行初等变换求逆矩阵

$$\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 1 & -4 & -7 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

(2) $XA = B$, $\quad XAA^{-1} = BA^{-1}$,

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

解矩阵方程的其他情况 ：

(1) $AXB = C$，且 A 与 B 可逆，则

$$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1},\quad X = A^{-1}CB^{-1}.$$

(2) $AX + B = C$， 且 A 可逆，则

$$AX = C - B,\quad X = A^{-1}(C - B).$$

(3) 如果 A 不可逆，怎样求解矩阵方程：

$$AX = B\ ?$$

设 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$，由 $AX = B$ 建立3个线性方程组求解.

例9 求 A 的逆矩阵 A^{-1}.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\quad \prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0 .$$

解：

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

二. 用行初等变换求逆矩阵

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \cdots\cdots$$

例10 设三阶矩阵A,B满足关系：

$$A^{-1}BA = 6A + BA, \text{且} A = \begin{pmatrix} 1/2 & & O \\ & 1/4 & \\ O & & 1/7 \end{pmatrix} \text{求} B.$$

解 $A^{-1}BA - BA = 6A$

$$\Rightarrow \left(A^{-1} - E\right)BA = 6A \Rightarrow \left(A^{-1} - I\right)B = 6I$$

$$\Rightarrow B = 6\left(A^{-1} - I\right)^{-1}.$$

二. 用行初等变换求逆矩阵

$$B = 6\left(A^{-1} - I\right)^{-1}$$

$$= 6\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

学到了什么？

逆矩阵的概念与性质

用行初等变换求逆矩阵