1.2 高斯消元法与矩阵的初等变换

主要内容：

- 引入
- 初等变换与高斯消元法
- 初等矩阵

一.引入

方程组 AX=b

$$\text{其中 } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\text{就是}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

二. 初等变换与高斯消元法

<u>齐次方程组</u>：$AX=0$;

<u>非齐次方程组</u>：$AX=b,\quad b\neq 0$

(b中至少有一分量不为零)

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 为$AX=b$的<u>解</u>：$AX=b$ 成立.

即 $x_1,\dots,x_n$ 使得方程组成立

问题

1.方程组何时有解？

2.若有解，有多少解？如何求出其全部解？

例1. 考虑方程组的如下同解变换：

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1 \qquad\quad +x_3=-2 \end{cases}, \qquad \bar{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad +x_3=-2 \\ 2x_1+x_2-x_3=1 \end{cases}, \qquad \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -2 \\ 2 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad +x_3=-2 \\ \qquad x_2-3x_3=5 \end{cases}, \qquad \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 1 & -3 & | & 5 \end{pmatrix}$$

行（简化）阶梯形矩阵

得一般解（无穷多组解）：

$$\begin{cases} x_1 = -x_3-2 \\ x_2=3x_3+5 \end{cases},$$

自由未知变量

例2. 若某方程组经同解变换化为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ \qquad\quad x_2 - x_3 = -1 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\overline{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

显然，有唯一解.

行阶梯形矩阵

例3. 若某方程组经同解变换化为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = 5 \end{cases} \qquad \overline{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

即 $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ 0x_3 = 6 \end{cases} \qquad \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

显然，无解.

定义1：（初等变换）矩阵的（列）初等变换：

- 交换两行（列）的位置；
- 用一非零数乘某一行（列）的所有元；
- 把矩阵的某一行（列）的适当倍数加到另一行（列上去）.

高斯消元法就是对增广矩阵实施行初等变换化为 行（简化）阶梯形.

例4. 是否为行（简化）阶梯形？

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例5．解方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2-5x_3=2 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=5 \end{cases}$

解： $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

无解.

例6. 解方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 2 \end{cases}$$

解：

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

二. 初等变换与高斯消元法

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 - 7x_5 \\ x_3 = 2 - 4x_5 \\ x_4 = -1 + 3x_5 \end{cases}, \; x_2, x_5 \text{任意（自由未知量）}$$

为方程组的全部解.

增广矩阵经行初等变换化为行（简化）阶梯形，
该阶梯形与方程组解的关系：

$$\overline{A} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

行（简化）阶梯形中
非零行的行数<未知量个数

无穷多解

二. 初等变换与高斯消元法

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

行（简化）阶梯形中
非零行的行数=未知量个数

唯一解

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

该数不为0

无解

二. 初等变换与高斯消元法

问题： 对于齐次方程组 $AX=0$ ？

$$\overline{A}\rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

行（简化）阶梯形中
非零行的行数<未知量个数

有非零解（无穷多解）

$$\overline{A}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

行（简化）阶梯形中
非零行的行数=未知量个数

只有零解（唯一解）

一般地，设线性方程AX=b的增广矩阵为：

$$(A\vdots b)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$$
\xrightarrow{\text{行（列）初等变换}}
\begin{pmatrix}
1 & & & & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
 & 1 & & & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\
 & & \ddots & & & \ddots & & \\
 & & & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,r+1} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \underline{d_{r+1}} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

二. 初等变换与高斯消元法

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
 & 1 & & & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\
 & & \ddots & & & \ddots & & \\
 & & & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,r+1} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \underline{d_{r+1}} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

1. $d_{r+1} \neq 0$，无解；

2. $d_{r+1} = 0$，有解：

(1) $r = n$：有唯一解：$x_1 = d_1, x_2 = d_2, \cdots, x_n = d_n$.

(2) $r < n$：有无穷多组解：

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n + d_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n + d_r \end{cases}$$

x_{r+1}, x_{r+2}, $\cdots$, x_n: **自由未知量**

二. 初等变换与高斯消元法

A 与 B 等价：$A \xrightarrow{\text{初等变换}} B$． 记为$A \cong B$

矩阵等价具有以下性质:

(1) 反身性 $A \cong A$;

(2) 对称性 $A \cong B \Rightarrow B \cong A$;

(3) 传递性 $A \cong B$ 且 $B \cong C \Rightarrow A \cong C$.

例1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 10 & 30 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 13 & 25 & 11 \end{pmatrix}$$

定义（初等矩阵）:对单位矩阵作一次初等变换所得矩阵

三种初等矩阵:

1.

$$
E_{ij} = \begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

三. 初等矩阵

2.

$$E_i(c)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ i\ 行 \\ \\ \\ \end{array}\quad (c\neq 0)$$

3.

$$E_{ij}(c)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & c & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ i\ 行 \\ \\ j\ 行 \\ \\ \\ \end{array}$$

定理: 对矩阵A作一次行（列）初等变换，相当于在A的左（右）边乘上相应的初等矩阵.

（"左乘行，右乘列"）

定理的应用: ……

1. 若矩阵B是经有限次行初等变换得到的，则存在有限个初等矩阵$E_1, \ldots, E_k$, 使得

$$B = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$$

三. 初等矩阵

2. 若矩阵B是经有限次列初等变换得到的，则存在有限个初等矩阵$E_1, \dots, E_k$，使得

$$B = AE_1E_2\cdots E_k$$

3. 若矩阵B是经有限次初等变换得到的，则存在有限个初等矩阵$P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_t$使得

$$B = P_k\cdots P_1AQ_kQ_{k-1}\cdots Q_1$$

例7 **设矩阵**

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11}+a_{12} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21}+a_{22} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31}+a_{32} \end{pmatrix}$$

$$P_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $B=(\quad)$.

(1) P_2AP_3 (2) AP_1P_3 (3) AP_3P_1 (4) AP_2P_3

答案：(4).

学到了什么？

初等变换与高斯消元法

初等矩阵