1.1 矩阵及其运算

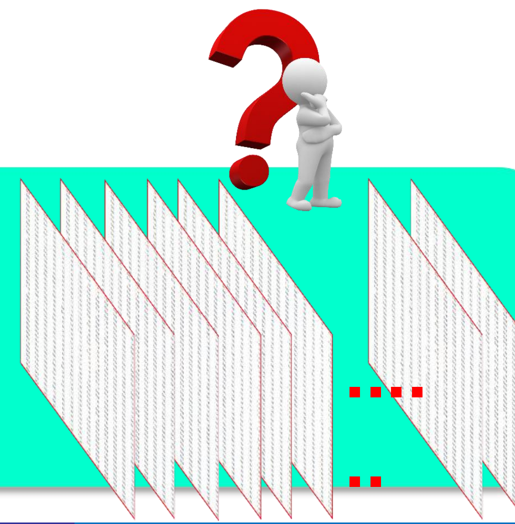
主要内容：

- 矩阵的概念
- 矩阵线性运算
- 矩阵的乘法
- 矩阵的转置

矩阵的概念

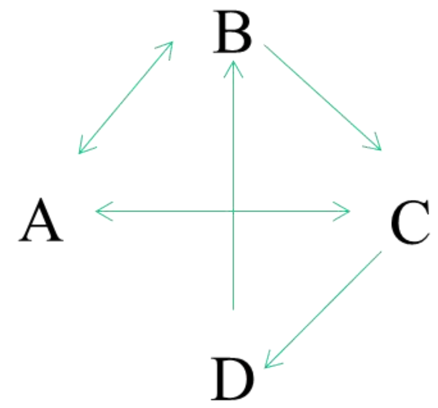
$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x-5y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1+3x_2=1 \\ 4x_1-5x_2=0 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$



矩阵的概念

某航空公司在A,B,C,D四城市之间开辟了若干航线 ,如图所示表示了四城市间的航班图,如果从A到B有航班,则用带箭头的线连接 A 与B.



	A	B	C	D
A		★	★	
B	★		★	
C	★			★
D		★		

0	1	1	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0

写成这样的好处?

实际问题>数学>更易分析&计算

矩阵的概念

- 矩阵是数学中一个极重要的应用广泛的工具.
- 矩阵就是一个 数表.

定义: 由$m\times n$个数排成的m行n列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个m行n列的<u>矩阵</u>，简称为<u>$m\times n$矩阵</u>，其中a_{ij}表第i行第j列<u>元素</u>.

常记为$A_{m\times n}$或$A=(a_{ij})_{m\times n}$.

例如，$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=(1\ \ 2\ \ 4)$, 等.

零矩阵： 如：$O_{2\times 2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $O_{2\times 1}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$.

方阵： $m=n$时，称A为n阶矩阵（n阶方阵）.

行矩阵、列矩阵： $(1\ \ 0\ \ -1\ \ 2)$, $\begin{pmatrix}6\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$

对角矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}=\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\dots,a_{nn})$$

a_{ii}称为对角元.

如 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\operatorname{diag}(2,-1)$

单位矩阵：

$$I=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}=\operatorname{diag}(1,1,\dots,1)$$

矩阵的概念

上三角形矩阵、下三角形矩阵：

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

系数矩阵、增广矩阵：

可以建立线性方程组与矩阵的一一对应：

如，称 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

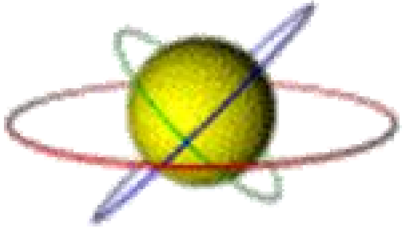
为线性代数方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = -2 \end{cases}$ 的系数矩阵；________

矩阵的概念

系数及常数项组成的矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

称为方程组的**增广矩阵**.



同型矩阵： $A_{m\times n}, B_{m\times n}$

A与B相等： $A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$同型，且

$$a_{ij}=b_{ij}, \qquad i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n$$

记为$A=B$.

加法： A与B同型，定义

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}).$$

例1 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & x & 3\\ y & 1 & z\end{pmatrix},$$

已知 $A=B$,求 x, y, z.

解: $\because\ A=B,$

$\therefore x=2,\ y=3,\ z=2.$

注意：对于同型矩阵才有意义.

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$与$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$不能相加.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

矩阵的线性运算

负矩阵： $-A=(-a_{ij})$

$$A+(-A)=O$$

减法：$A-B=A+(-B)$ (对应元素相减)

$$A=B\Leftrightarrow A-B=O$$

数乘：$kA=(ka_{ij})$

例，$-A=(-1)A=(-a_{ij})$, $2\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\0 & 2\end{pmatrix}$

矩阵的线性运算：<u>加法</u>、<u>数乘</u>.

矩阵的线性运算满足如下八条性质：

① $A+B=B+A$

② $(A+B)+C=A+(B+C)$

③ $A+O=A$

④ $A+(-A)=O$

⑤ $1A=A$

⑥ $k(lA)=(kl)A$

⑦ $k(A+B)=kA+kB$

⑧ $(k+l)A=kA+lA$

例2 某电子集团生产三种型号的彩电，第一季度各40万台, 20万台, 30万台, 第二季度各30万台, 10万台, 50万台, 每万台的利润分别是400万元, 300万元, 500万元, 第一,二季度各类产品的利润是多少？

解：产量矩阵 $A=\begin{pmatrix} 40 & 20 & 30 \\ 30 & 10 & 50 \end{pmatrix}$

单位利润矩阵：$B=\begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix}$

矩阵的乘法

利润矩阵 $C = \begin{pmatrix} 40\times 400 + 20\times 300 + 30\times 500 \\ 30\times 400 + 10\times 300 + 50\times 500 \end{pmatrix}$

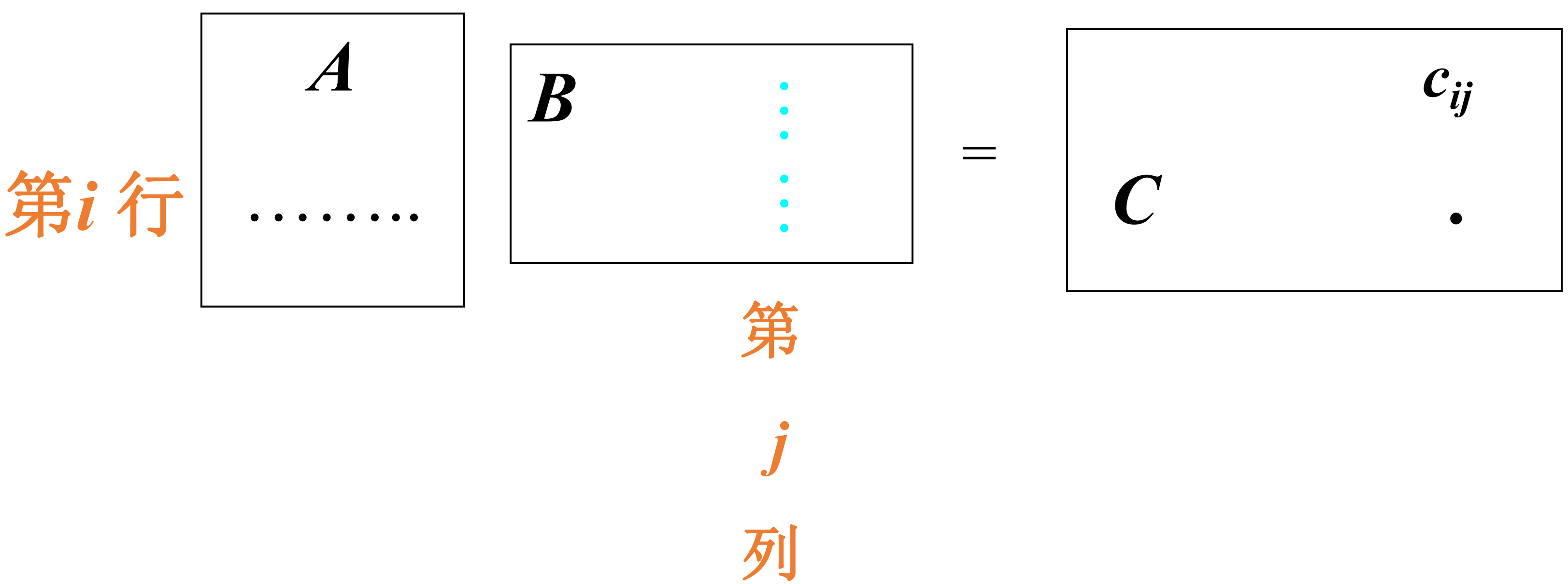
$$= \begin{pmatrix} 37000 \\ 40000 \end{pmatrix}$$

矩阵的乘法

- 矩阵的乘法：$A_{m\times t}B_{t\times n}=C_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$

  其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{it}b_{tj}=\sum_{k=1}^{t}a_{ik}b_{kj}$

  $$(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n)$$



例3. 设$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$,

求AB, AC.

解. $AB=\begin{pmatrix}0 & -5\\ 1 & 9\end{pmatrix}$,

AC无意义.

例4. 设$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $B=(b_1,b_2,\dots,b_n)$. 求AB, BA.

解.

$$AB=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1,b_2,\dots,b_n)=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

$$BA=(b_1,b_2,\dots,b_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n$$

矩阵的乘法

例5. $$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

解: $$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_1+a_{21}b_2+a_{31}b_3 & a_{12}b_1+a_{22}b_2+a_{32}b_3 & a_{13}b_1+a_{23}b_2+a_{33}b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$=a_{11}b_1^2+a_{22}b_2^2+a_{33}b_3^2+2a_{12}b_1b_2+2a_{13}b_1b_3+2a_{23}b_2b_3.$$

矩阵的乘法

例6　设$A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. 求$AB$, BA.

解: $AB=O$,　$BA=\begin{pmatrix}4 & *\\ * & *\end{pmatrix}$

$AB\neq BA$. (不可交换)

且　$AB=O \not\Rightarrow A=O$ 或 $B=O$

$\left.\begin{array}{r}AB=AC\\ A\neq O\end{array}\right\} \not\Rightarrow B=C$ (矩阵乘法不适合消去律)

但是　$IA=A=AI$

$(kI)A=kA=A(kI)$

例7. （线性方程组的矩阵形式）

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

则方程组就是 $AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = b$

矩阵的乘法

矩阵乘法的运算规律：

- $(AB)C = A(BC)$
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- $A(B+C) = AB + AC$

  $(B + C)A = BA + CA$

矩阵的乘法

证明: $(AB)C = A(BC)$

证: 设$A_{m\times n}, B_{n\times p}, C_{p\times s}$.

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk})c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}c_{kj}$$

$$(A(BC))_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}(\sum_{k=1}^{p} b_{lk}c_{kj})$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{il}b_{lk}c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}c_{kj}$$

所以，$(AB)C = A(BC)$

定义（方阵的幂）：

设A为n阶方阵，k为正整数，

定义 $$\begin{cases} A^1 = A \\ A^{k+1} = A^k A, \ k = 1,2,\ldots \end{cases}$$

设m, k为正整数，

$$A^m A^k = A^{m+k}$$

$$(A^m)^k = A^{mk}$$

注意 一般，$(AB)^k \neq A^k B^k$

定义（方阵的多项式）：

设$f(x)=a_k x^k+\cdots a_1 x+a_0$

为x的多项式，A是n阶方阵，则

$$f(A)=a_k A^k+\cdots a_1 A+a_0 I$$

称为A的k次多项式.

设有多项式$f(x)$, $g(x)$, A, B 为n阶方阵，则

$$f(A)\,g(A)=g(A)\,f(A).$$

但是，一般 $\boxed{f(A)f(B)\neq f(B)f(A).}$

矩阵的乘法

如， $(A-I)(2A+I)=(2A+I)(A-I)$

注意 一般， $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$ 等等

$$(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$$

但是 $(A+I)^2=A^2+2A+I$ 等等

$$(A+I)(A-I)=A^2-I$$

矩阵的转置

定义（转置）：

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

称 $A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 为A的转置.

A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$A_{m\times n}$, $\quad (A^T)_{n\times m}$

矩阵的转置

例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$;

$B = \begin{pmatrix} 18 & 6 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}$.

矩阵的转置

性质：

① $(A^T)^T = A$

② $(A+B)^T = A^T + B^T$

③ $(kA)^T = kA^T$

④ $(AB)^T = B^T A^T$

$(A_1 A_2 \cdots\cdots A_k)^T = A^T{}_k A^T{}_{k-1} \cdots\cdots A^T{}_1$

证明 $(AB)^T = B^T A^T$：

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$， $B=(b_{ij})_{n\times s}$

$(AB)^T$与$B^T A^T$显然同型

$$((AB)^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}\ ,\quad (B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$$

所以, $(AB)^T = B^T A^T$.

矩阵的转置

例8. 设$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, 求$AB$, B^TA^T.

解:

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 5 & -1\\ 8 & 4\end{pmatrix}$$

$$B^TA^T=(AB)^T=\begin{pmatrix}3 & 5 & 8\\ -3 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

矩阵的转置

对称矩阵： $A^{\mathrm{T}} = A$

即 $a_{ij} = a_{ji}, \ \forall i, j$

反对称矩阵： $A^{T} = -A$

即 $a_{ii} = 0, \ a_{ij} = -a_{ji}, \ \forall i \neq j$

例如，下列矩阵是否是对称矩阵？反对称矩阵？

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的转置

问题： 数乘对称矩阵是否仍为对称矩阵？

同阶对称矩阵之和是否仍为对称矩阵？

同阶对称矩阵的乘积是否仍为对称矩阵?

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

例9. 设A, B均为n阶对称阵，则

$$AB\text{对称} \Leftrightarrow AB = BA.$$

证： $\Leftarrow$: $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$

$\Rightarrow$: $(AB)^T = AB$

所以 $AB = (AB)^T = B^T A^T = BA.$

证明： 对任意矩阵 A，AA^{T} 和 $A^{T}A$ 都是对称矩阵.

证： $(AA^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = AA^{\mathrm{T}}$

例10. 设A是n阶反对称矩阵，B是n阶对称矩阵，则 $AB+BA$是n阶反对称矩阵.

证： $$(AB+BA)^T = (AB)^T + (BA)^T = B^T A^T + A^T B^T$$
$$= B(-A) + (-A)B$$
$$= -(AB+BA).$$

学到了什么？

- 矩阵的概念
- 矩阵线性运算
- 矩阵的乘法
- 矩阵的转置