《数学实验》第7讲

主要内容：

符号计算基础

常用符号计算函数：　compose limit diff int taylor solve dsolve

符号计算基础

- 符号计算函数可以完成准确的推导、计算
  如求导、求极限。
- 一般使用规则：
  计算中的符号变量需要先定义
  再调用符号计算相关函数进行处理。
- 符号计算部分功能
  - 复合运算、变量代换及化简
  - 线性代数：行列式，特征值等
  - 微积分：求导，求极限，定积分，微分方程的求解等。

快速入门：求极限，求导数

数学问题	MATLAB程序
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$	`syms x;` `r=limit(exp(-x),x,+inf)`
$(x^2e^x)'=2xe^x+x^2e^x$	`syms x;` `d=diff(x*x*exp(x),x,1)`

定义符号变量syms

- syms命令定义符号变量，可以一次定义多个变量
- 一般用法：

```
syms arg1 arg2 …
syms arg1 arg2 … real
syms arg1 arg2 … positive
```

- 示例1：创建符号表达式x^2+y^2

```
syms x y
f=x^2+y^2
```

返回结果为：`f = x^2 + y^2`

示例2：创建符号数组f（2行2列）

```
syms x y
f=[x^2-2*x*y+y^2, x+y; x-y, x*y+y*y]
```

输出：

```
f =
[ x^2 - 2*x*y + y^2,       x + y]
[             x - y, y^2 + x*y]
```

定义符号变量sym

- 用于创建符号变量；也可将字符或数字转换为符号类型，sym 一次处理一个变量或表达式。
- 基本用法：sym(A)

  如果A是字符串，则产生一个符号数或变量；

  如果A是数值标量或数值矩阵，则其转为符号类型。

示例： x1=sym('x1')，a=sym('sqrt(200)')，v=sym('[100 200]')

运行输出：

```
x1 =  x1
a = 10*2^(1/2)
v=[ 100, 200]
```

定义符号变量用法比较

- syms与sym使用对比：
- 示例：使用syms定义（与下列调用sym语句效果相同）
- syms x y real

- 使用sym定义：

```
x = sym('x','real');
y = sym('y','real');
```

符号表达式的替换subs

- subs函数将符号表达式中的符号变量用其他符号表达式或数值代替，实现符号的替换。其使用格式为：

```
subs(s, old, new)
```

- 将s表达式中old变量替换为new。

old可以是单一变量，也可以是由s表达式中多个变量构成的向量，new用来替换的符号表达式。

- 示例：

```
syms x y z
f=x^2+y^2+z^2
fval=subs(f,[x,y],[1,2])
```

运行结果：

```
f = x^2 + y^2 + z^2
fval = z^2 + 5
```

其他用法：

```
fval=subs(f,{'x','y'},{1,2})
fval=subs(f,{x,y},{1,2})
```

符号表达式的化简

- simplify：对表达式进行化简
- 示例：

```
syms x y
s1 = simplify(cos(x)^2-sin(x)^2)
s2 = simplify(x^3+3*x^2+3*x+1)
```

- 返回结果：

```
s1 = cos(2*x)
s2 = (x + 1)^3
```

符号计算精度及其数据类型转换（自看）

- digits:显示vpa计算结果的有效数字的位数
- digits(n):设置vpa计算结果的有效数字的位数
- vpa(s):计算符号表达式s的数值结果
- vpa(s,n):采用n位有效数字计算精度求s的数值结果
- double(s):将符号表达式s转化为双精度数值
- char(s):将符号表达式s转化为字符串

符号计算精度及其数据类型转换

示例:

- >> t=sqrt(sym(pi)),   a=vpa(t),   b=double(t),   whos a b

运行结果:

```
t = pi^(1/2)
a =    1.7724538509055160272981674833411
b =    1.7725
  Name        Size              Bytes    Class     Attributes
  a           1x1               112       sym
  b           1x1               8        double
```

复合计算函数compose

- 主要用法：
- compose(f, g)：　返回复合函数f(g(y))，其中f=f(x),g=g(y).
  x和y分别为f、g中找到的符号变量.
- compose(f, g, z)：返回复合函数f(g(z))， f=f(x)， g=g(y)，
  x,y含义同上一种用法． 最后用指定变量z代替变量y.
- compose(f, g, x, y, z)：返回复合函数f(g(z)).
  将x=g(y)代入f(x)中， 最后用指定的变量z代替变量y

复合计算函数compose

- 示例：

```
syms x y t
f = 1/(1+x);
g = sin(y)^2
h = compose(f,g,x,y,t)
```

运行结果：

```
f  =  1/(x + 1)
g =  sin(y)^2
h = 1/(sin(t)^2 + 1)
```

常用符号计算函数：compose\limit\diff\int

计算极限函数：limit

- 函数一般使用格式：

limit(f,x,a)：

计算f(x)当x趋向于a的极限

limit(f,x,a,'right')：

计算右极限

limit(f,x,a,'left')：

计算左极限

- 示例：计算数列的极限。

- 编程实现：

```
syms n
an=(1+1/n)^n;
S=limit(an,n,inf) %计算数列极限
```

- 返回结果：
- S = exp(1)

实践题1（5min）

示例：

求一元函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}$，并绘图观察函数在变量x趋于0时函数的变化趋势。

求导计算diff

- 用法：

diff(s,'v')　　求s对自变量v的1阶导数

diff(s,'v',n)　求s对自变量v的n阶导数

- 注：'v' 可以为符号变量

已知 $f(x,y)=x^2y+2xy+y^2$，求 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$.

编写程序：

```
syms x y
f= x^2*y + 2*x*y + y*y
d1 = diff(f,x,1)
d2 = diff(f,y,1)
```

运行结果：

```
d1 = 2*y + 2*x*y
d2 = x^2 + 2*x + 2*y
```

实践题2（5min）

- 求下列函数的一阶导数：

$$y = \frac{ae^x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

常用符号计算函数：compose\limit\diff\int

符号积分函数int

- 用法：
- s=int(expr,var)：
  以expr表达式中的变量var为积分变量计算不定积分
- s=int(expr,var,a,b)
  以expr表达式中的变量var为积分变量计算定积分，积分上下限分别为b和a。

- 示例： 使用符号工具箱函数解下列不定积分：

$$\int x\ln(x^2-1)dx$$

- 编写程序：

```
syms x a
f=int(x*log(x*x-1))
```

常用符号计算函数：taylor\solve\dsolve

泰勒(taylor)多项式函数

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

一般用法：

- `taylor(f)`: 计算f的5阶麦克劳林多项式
- `taylor(f,v,Name,Value)`
- `taylor(f,v,a)`: 计算f在点a展开的麦克考林多项式
- `taylor(f,v,a,Name,Value)`: 指定属性名称，属性值的调用方法

  `f`: 函数的表达式或者符号变量　　`v`: 为函数的自变量

  `Name`: 为属性名（用字符串表示）　　`Value`: 为属性值。

泰勒(taylor)多项式函数

- 求e^x的7阶泰勒多项式.

```
>>taylor(exp(x),x,0,'order',8)
  ans =
  x^7/5040 + x^6/720 + x^5/120 + x^4/24 + x^3/6 + x^2/2 + x + 1
>>taylor(exp(x),x,'expansionpoint',0,'order',8)
  ans =
x^7/5040 + x^6/720 + x^5/120 + x^4/24 + x^3/6 + x^2/2 + x + 1
```

说明：以上两个语句效果相同。

常用符号计算函数：taylor\solve\dsolve

求解方程(组)：solve

示例：

求解含参数的方程组 ax+by=10， ax-by=20

编程实现：

```
s=solve('a*x+b*y=10','a*x-b*y=20','x','y')
sol_x = s.x
sol_y = s.y
```

运行结果：

```
s =
    x:  [1x1 sym]
    y:  [1x1 sym]
    sol_x =   15/a
    sol_y =   -5/b
```

求解微分方程：dsolve

示例：

求下列微分方程的特解： $\dfrac{dy}{dt}=(10-0.02t)t,\ y(0)=4$

要点：

1．用字符串描述微分方程及其初始条件；

2．导数的表示规则：以未知函数y为例，

“Dy”表示对y的1阶导数，

“D2y”表示对y的2阶导数，其他各阶导数类似.

编程实现：

```
y=dsolve('Dy=(10-0.02*t)*t','y(0)=4','t')
```

运行结果：

```
y =  4 - (t^2*(t - 750))/150
```

求得函数：$y=4-\dfrac{t^2(t-750)}{150}$

实践题3 (2min)

求下列微分方程的特解： $$\frac{dy}{dx}=(50-0.01y)y,\ y(0)=4$$

常用符号计算函数：taylor\solve\dsolve

补充部分：定义符号变量syms

- 练习：使用syms定义20个符号变量 x1,x2,…, x20.
- 常规定义形式：syms x1 x2 x3 … x20
- 编程实现：
- for i=1:20
- eval(sprintf('syms x%d',i))
- end
- whos

运行结果：

```
Name        Size            Bytes      Class
Attributes
  i          1x1                8      double
  x1         1x1              112      sym
  x2         1x1              112      sym
  x3         1x1              112      sym
     … …
```

学到了什么?

符号计算基础

常用符号计算函数： compose limit diff int
taylor solve dsolve