《数学实验》第16讲

主要内容：

- 随机现象及模拟
- 随机变量模拟(随机模拟的基础)
- 蒙特卡罗方法原理
- 应用实例

一、确定性现象

在一定条件下，某种结果必然会发生的现象

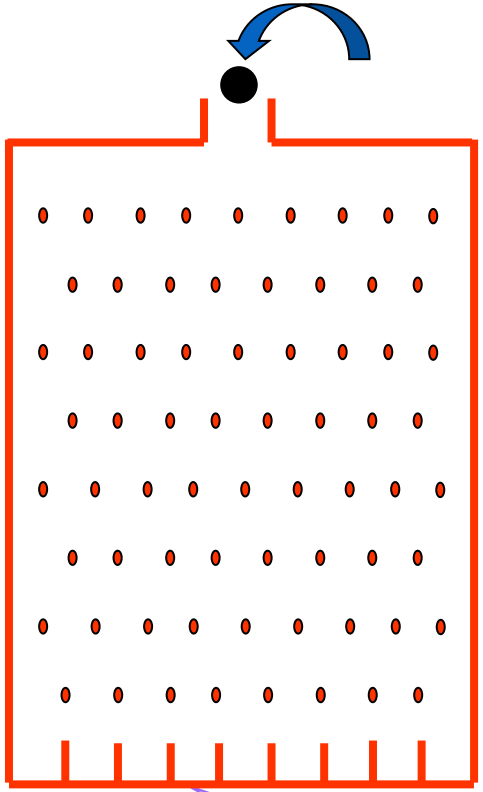
比萨斜塔试验

在标准大气压下，水加热到100摄氏度，就必然会沸腾。

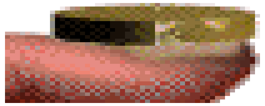
确定性现象的特点：

可事前预言

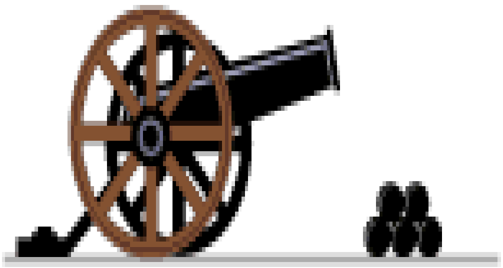
二、不确定性现象



小球将落入哪一格?



硬币将出现哪一面?



不确定性现象的特点：不可事前预言

但在大量重复试验，某些不确定现象又呈现出规律性。

三、随机现象

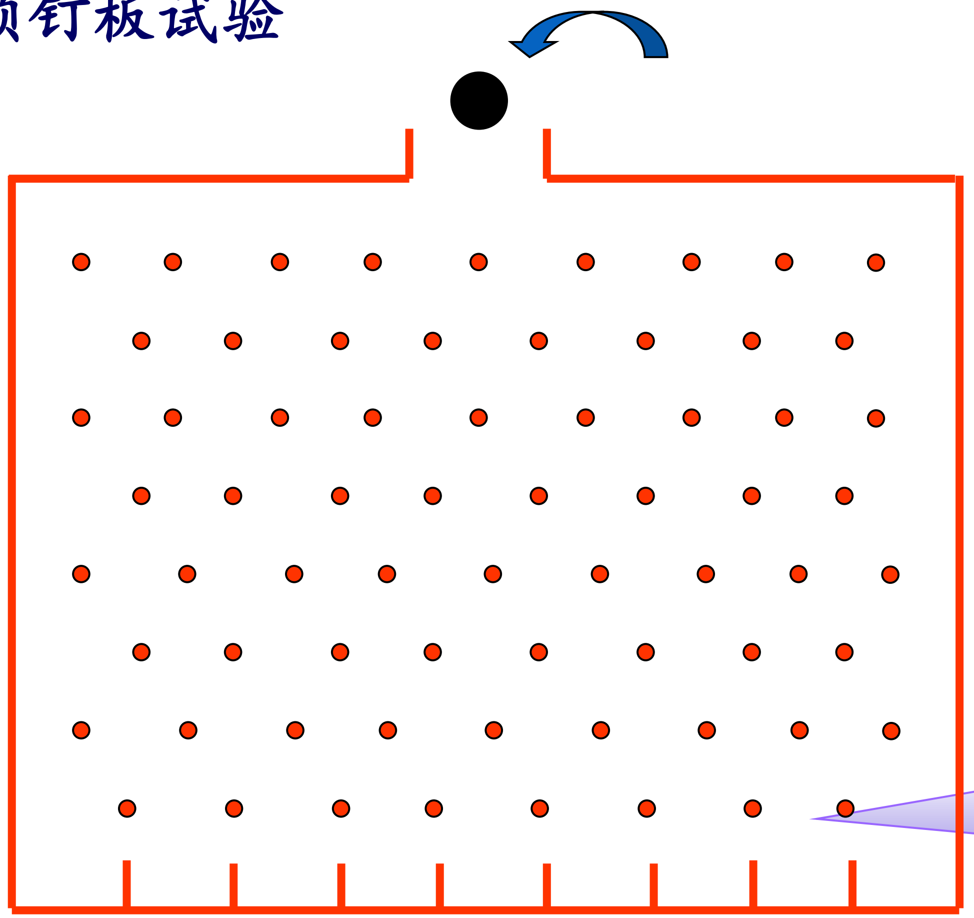
称大量同类随机现象所呈现的固有规律为随机现象的统计规律性。

为了探索随机现象的规律性，理想化的方法是在相同条件下将实验大量重复进行，采集到试验数据，再对数据进行统计分析，得到其规律性。

但当试验周期长，或一个试验具有破坏性时，通过试验采集数据是不可能的，此时，通过计算机做随机模拟的方法就是最简单、经济和实用的方法。

四、随机模拟

引例 高尔顿钉板试验



小球将落入哪一格?

需建立数学模型，描述小球的运动过程

假设：

1. 共有n层钉子；
2. 小球入口处水平位置为坐标原点0；
3. 小球在每层碰到钉子后，向左或向右等可能位移一格，不会出现跳格（位移2格以上）的情况；
4. 小球在不同层向左或向右是相互独立的.

则随机变量序列：

$$X_k=\begin{cases}1, & 第k层向右\\ -1, & 第k层向左\end{cases}\qquad k=1,\ldots,n$$

X_k	-1	1
p	$1/2$	$1/2$

完整描述了小球在n层钉板的运动过程.

关注：小球经n次碰撞后在钉板底层所处位置

$$Y_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$$

回顾：

高尔顿钉板试验中，小球最终的位置

$$Y_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$$

其中

X_k	-1	1
p	1/2	1/2

要模拟小球的运动轨迹，首先要模拟随机变量X_k，那么如何模拟随机变量呢？

一、随机数的生成

函数名	解释
rand	生成(0,1)区间上均匀分布的随机数
unifrnd	生成指定区间内均匀分布的随机数
randn	生成服从标准正态分布的随机数
normrnd	生成指定均值、标准差的正态分布随机数
exprnd	生成服从指数分布的随机数

注：上述命令常被称为伪随机数生成器。

基本语法如下：

rand(m)	生成m*m维的随机数
rand(m,n)	生成m*n维的随机数
rand([m,n,p ...])	生成排列成m*n*p... 多维向量的随机数

问题: 如何模拟在区间[a, b]内均匀分布随机数？

1. a+(b-a)*rand(m, n)

2. unifrnd(a, b, m, n)

二、离散型随机变量

思考：如何利用rand生成1000个下列离散型随机变量？（5min练习）

X_k	-1	1
p	1/2	1/2

分析：rand是生成（0,1）上均匀分布随机数，生成数落在(0,0.5)和[0.5,1)上概率均为0.5，故可令

$$X_k=\begin{cases}-1, & rand<0.5\\ 1, & rand\geq 0.5\end{cases}$$

随机变量模拟(随机模拟的基础)

参考程序：

```
N=1000;
Y=rand(1,N);
for i=1:N
   if Y(i) < 0.5
       X(i)= -1;
   else
       X(i)= 1;
   end
end
X
```

思考：一般的离散随机变量如何模拟?

引例：　请计算

$$I=\int_1^2 \frac{\sin(x)}{x}dx$$

分析 $I=\int \frac{\sin(x)}{x}dx$ 原函数不存在，所以无法用Newton-Leibniz公式求解。

故可考虑数值积分方法：利用几何意义计算

$$\int_a^b f(x)dx$$

将分成 $[a,b]$ **n等分**：

$$\Delta x=\frac{b-a}{n} \qquad x_i=a+i\cdot\Delta x\ (i=0,1,\cdots,n)$$

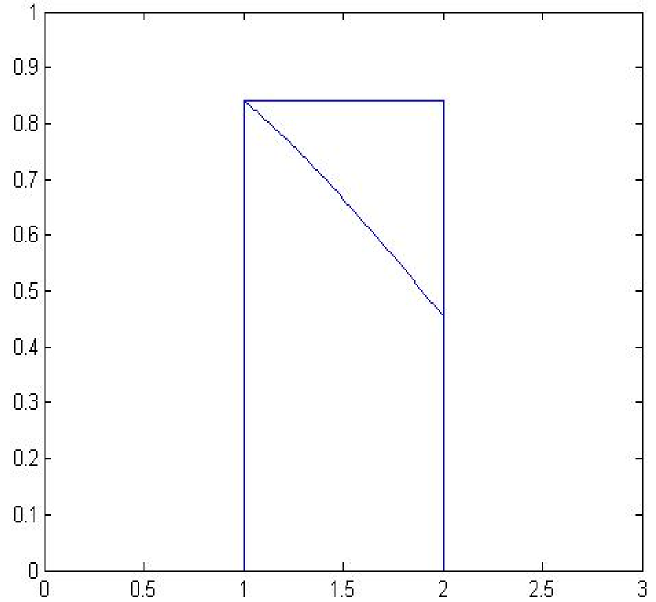
蒙特卡罗方法原理

记 $f(x_i)=y_i \ (i=0,1,\cdots,n)$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx y_0\Delta x+y_1\Delta x+\cdots+y_{n-1}\Delta x$$

$$=\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})$$

(左矩形公式)



其他近似计算方法：

思路：定积分几何意义为曲边梯形的面积，可考虑求曲边梯形与矩形面积之比。

蒙特卡罗方法原理

问题：如何求面积之比？

可考虑把面积之比看成概率，于是可用频率去近似。因此可在矩阵区域内均匀投点，求解两个区域内点数之比。

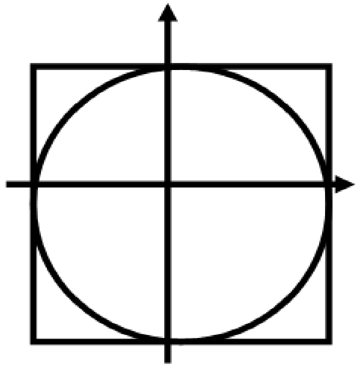
基本思想：

当所要求解的问题是某种事件出现的概率，或者是某个随机变量的期望值时，它们可以通过某种“试验”的方法，得到这种事件出现的频率，或者这个随机变数的平均值，并用它们作为问题的解

蒙特卡罗方法

蒙特卡罗方法，或称计算机随机模拟方法，是一种基于“随机数”的计算方法。源于美国在第二次世界大战研制原子弹的“曼哈顿计划”，该计划的主持人之一数学家冯·诺伊曼用驰名世界的赌城—摩纳哥的Monte Carlo—来命名这种方法，为它蒙上了一层神秘色彩。

例： 采用蒙特卡罗方法估计圆周率



分析：

设圆的半径为1，则其外切正方形的面积为4，圆的面积为π ，现在模拟产生在正方形ABCD中均匀分布的点n个，如果这n个点中有m个点在该圆内，则圆的面积与正方形ABCD的面积之比可近似为m/n；即

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{m}{n} \Rightarrow \pi \approx \frac{4m}{n}$$

思考如何编程？（5min）

程序参考代码：

```
n=input('请输入产生点的个数：');
m=0;
for i=1:n
    x=-1+2*rand; y=-1+2*rand;
    if x^2+y^2<=1   % if within the circle
      m=m+1;        % count 1
    end
end
mypi=4*m/n
```

例1: 曲线所围区域面积 （5min）

用随机模拟方法估算两条抛物线$y = x^2$, $x = y^2$所围图形的面积

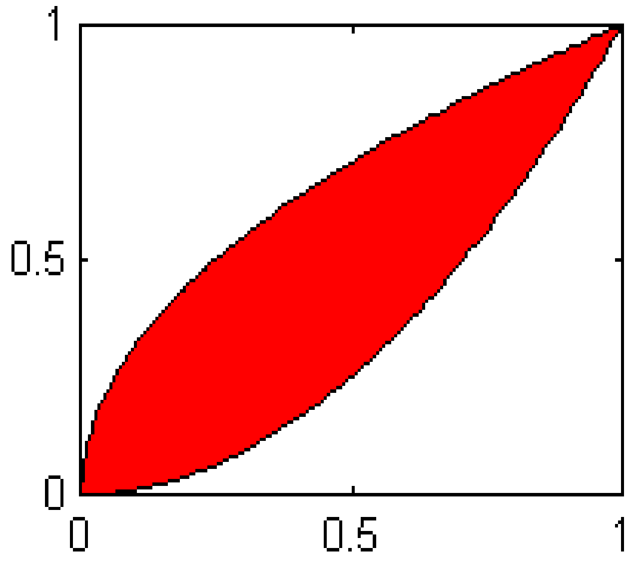
分析:

(1)两条曲线交点, [0,0], [1,1]

(2)用一个矩形区域包含所围

区域: $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$

(3)所围区域内的点满足: $x^2 \le y \le \sqrt{x}$



曲线所围区域面积---程序

```
N=1000;
data=rand(N,2);
x=data(:,1);
y=data(:,2);
II=find(y<=sqrt(x)&y>=x.^2);
M=length(II);
S=M/N
```

运行输出：

S =

0.3276

例2：求解下列优化模型

$$\min f(x_1, x_2) = 3(x_1 - 1)^2 + 4(x_2 - 2)^2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 \le 3 \\ x_2 \le 5 \end{cases}$$

分析：可在可行域内随机投点，比较各点处函数值的大小找到最小值

```
function y=fun(x)
y=3*(x(1)-1).^2 + 4*(x(2)-2).^2;
```

应用实例

```
function opt_sim_ex1
n = 1e5; %随机点个数
fobj = inf;
for i = 1:n,
    x(1) = 3*rand;  x(2) = 5*rand;
    temp = fun(x);
    if temp < fobj, %找"最小值"
        fx = x;  fobj = temp;
    end
end
%返回近似最优解
fx    %变量x1,x2取值
fobj %对应函数值
```

更多例子（回到第1讲）：

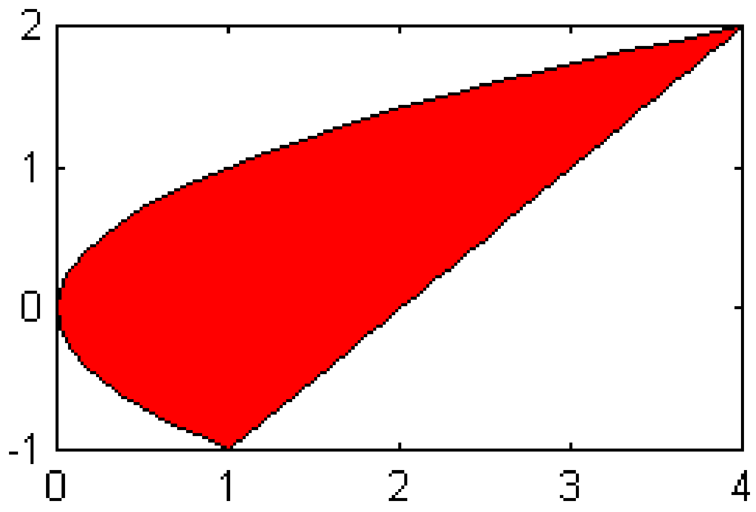
限定区域的随机投点实验

应用实例（补充）

例1：估算二重积分

计算二重积分：$\iint_D xy^2\, dxdy$

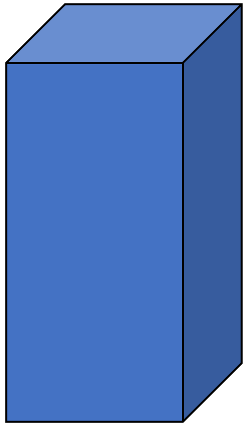
其中D为 $y=x-2$ 与 $y^2=x$ 所围区域。



分析:

(一) 二重积分几何意义是计算体积: 由于D的边界曲线交点为：(1,-1), (4,2), 被积函数在求积区域内的最大值为16。积分值是一个三维图形所围体积(V1)，该三维图形位于立方体区域

应用实例（补充）



$$\{(x,\ y,\ z)\mid 0\leqslant x\leqslant 4,\ -1\leqslant y\leqslant 2,\ 0\leqslant z\leqslant 16\}$$

该立方体区域的体积(V2)为192

(二) 蒙特卡罗方法求解：向立方体内投N个随机点，统计落在曲顶柱体内的个数M，则

$$\frac{V_1}{V_2}\approx\frac{M}{N}\Rightarrow V_1\approx\frac{M}{N}V_2$$

估算二重积分—程序

```
function testmain
N=100000;
for k=1:7   %多次模拟
V1(k)=mysim(N);
end
V1
```

理论结果：7.5857

V1 =

7.5859 7.5898 7.6262

7.5629 7.7894 7.6781

7.4304

```
function v =mysim(N)
V2=192;  %V2=4*3*16
d =rand(N,3); x =4*d(:,1);
y =-1+3*d(:,2); z =16*d(:,3);
%下面表达式可结合find和length完成
M =sum((x>=y.^2) & (x<=y+2) & (z<=x.*y.^2) );
v =V2*M/N;
```

例3：相遇问题

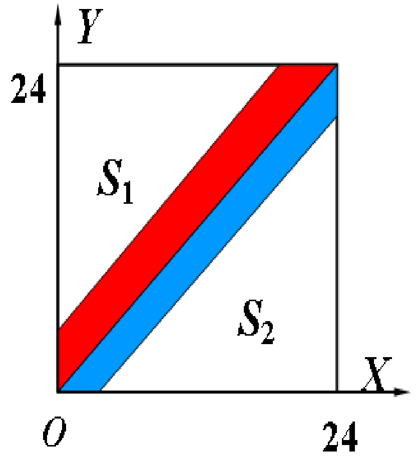
甲乙两船在24小时内独立地随机到达码头. 设两船到达码头时刻分别为 X 和 Y，且X ~ U(0 , 24), Y ~ U(0 , 24)。如果甲船到达码头后停留2小时,乙船到达码头后停留1小时.问两船相遇的概率有多大?

相遇条件：

(1)甲比乙先到码头：$x \le y$ 且 $y \le x+2$

(2)乙比甲先到码头：$y \le x$ 且 $x \le y+1$

应用实例（补充）



概率值：P = 0.1207

相遇问题程序

```
N=2000;
P=24*rand(2,N);
X=P(1,:);Y=P(2,:);
I=find(X<=Y&Y<=X+2);
J=find(Y<=X&X<=Y+1);
F=(length(I)+length(J))/N
```

运行程序：

F =0.1175

学到了什么?

随机现象及模拟

随机变量模拟(随机模拟的基础)

蒙特卡罗方法原理

应用实例