《数学实验》第9讲

主要内容：

- 矩阵运算函数
- 线性方程组求解的应用
- 应用实验：矩阵的幂
- 补充1：图像与矩阵关系
- 补充2：主成分分析（PCA）及人脸压缩与恢复应用

快速了解相关函数：

矩阵A的对角阵	diag(diag(A))
获取上三角阵(upper)	triu(A)
获取下三角阵(lower)	tril(A)
解线性方程组$Ax=b$	A\\$b$或者inv($A$)*$b$
矩阵的特征值、特征向量	[V, D]=eig(A)

请自行生成一个5阶随机矩阵，并快速练习上述命令（脚本文件编写）

解线性方程组 Ax=b

MATLAB命令：*A\b*

思考：*A/B?*

示例

```
>>A=rand(3,3);
x_true=rand(3,1)
b=A*x_true;
x_comp=A\b
```

结果

```
x_true =
         0.9649
         0.1576
         0.9706
x_comp =
         0.9649
         0.1576
         0.9706
```

矩阵特征值

定义 设A是n阶方阵，若非零向量α和数λ满足

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

称λ为A的一个特征值，称α为A对应于λ的一个特征向量。

•lambda=eig(A) —— 计算A的特征值，这里lambda是A的全部特征值构成的列向量。

•[P, D]=eig(A) ——计算出A的全部特征值和对应的特征向量。其中，D是对角矩阵，保存A的全部特征值；P是满阵，P的列向量构成对应于D的特征向量组。

例1. 计算矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

```
>> A = [-1 1 0;
        -4 3 0;
         1 0 2];

>> lambda =
         eig(A)
lambda =
     2
     1
     1
```

```
>> [P, D] = eig(A)
P =
    0          0.4082      0.4082
    0          0.8165      0.8165
    1.0000    -0.4082     -0.4082
D =
     2      0      0
     0      1      0
     0      0      1
```

线性方程组求解的应用

解线性方程组之所以重要:是因为很多复杂的实际问题最后往往可以<u>简化为或归结为比较容易处理的线性方程组</u>的问题。

线性方程组的理论应用已经渗透到数学发展的许多分支。

线性方程组在物理学、经济学、信息科学、工程技术和国民经济的许多领域都有着广泛的应用。

应用问题:

在减肥食谱中的应用

下表列出了某食谱中的3种食物以及每100克每种食物中含有的营养素的数量:

营养	每100克食物所含营养(g)			减肥所要求的每日营养量
	脱脂牛奶	大豆面粉	乳清	
蛋白质	36	51	13	33
碳水化合物	52	34	74	45
脂肪	0	7	1.1	3

如果用这三种食物作为每天的主要食物，那么它们的用量应各取多少才能全面准确地达到这个营养要求?

以100克为一个单位。为了保证减肥所要求的营养量，设每日需食用脱脂牛奶x_1个单位，大豆面粉x_2个单位，乳清x_3个单位，则由所给条件得

$$\begin{cases} 36x_1 + 51x_2 + 13x_{13} = 33 \\ 52x_1 + 34x_2 + 74x_3 = 45 \\ \qquad\qquad 7x_2 + 1.1x_3 = 3 \end{cases}$$

线性方程组求解的应用

求解该线性方程组

在MATLAB命令窗口中输入：

```
>> A = [36 51 13;
         52 34 74;
          0 7 1.1];
>> b = [33; 45; 3];
>> x = A\b
```

```
x =
      0.2772
      0.3919
      0.2332
```

解方程组得：

$$x_1 = 0.2772$$
$$x_2 = 0.3919$$
$$x_3 = 0.2332$$

即为保证减肥所要求的每日营养量，每日需：

脱脂牛奶27.72克，

大豆面粉39.19克，

乳清23.32克。

一、相关知识点

相似对角化，特征值，特征向量，正交矩阵

在许多工程计算中，经常遇到计算矩阵的幂的问题，请问有没有快速的计算方法?

定义: 设A, B都是n 阶方阵，若存在可逆矩阵P，使

$$P^{-1}AP=B$$

对A进行$P^{-1}AP$则称B是A的相似矩阵，并称矩阵A与B相似。运算称为对A进行相似变换，称可逆矩阵P为相似变换矩阵。

易证矩阵的相似关系满足：

①**自反性：** 对于任意n阶方阵A，有A与A相似；

②**对称性：** 若A与B相似，则B与A相似；

③**传递性：** 若A与B相似，B与C相似，则A与C相似。

定理 若n阶矩阵A与B相似，则A与B有相同的特征多项式，从而A与B有相同的特征值。

相似矩阵的一个重要性质：

若n阶矩阵A与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，

则$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$即为$A$的$n$个特征值。

定义 若n阶矩阵A与对角阵Λ相似，则称A可以相似对角化，简称A可对角化．

如果矩阵A可以相似对角化，则存在可逆矩阵P，满足

$$P^{-1}AP=\Lambda,$$

其中

$$P=(p_1, p_2, \ldots, p_n), \quad \Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

易得$AP=P\Lambda$.

由$AP=P\Lambda$得，$A\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1 p_1 & \lambda_2 p_2 & \cdots & \lambda_n p_n \end{pmatrix}$$

即：　$\boldsymbol{A\,p_i=\lambda_i p_i,\ i=1,2,\ldots n.}$

　　可知，λ_i为矩阵A的特征值，其中p_i为对应于特征值λ_i的特征向量。

应用实验：矩阵的幂

若A可对角化，则$A=P\Lambda P^{-1}$, 因此

$$A^k = P\Lambda P^{-1} P\Lambda P^{-1} \cdots P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^k P^{-1}$$

特别地，如果P是正交矩阵(正交矩阵$PP^T=I$)，则$A=P\Lambda P^T$.

此时，矩阵的幂有：

$$A^k = P\Lambda^k P^T$$

这样就大大简化了计算矩阵的幂A^k的复杂度。

注：需要计算矩阵A的特征值和特征向量。

示例： 设对称矩阵A如下，求A^5。

$$A=\begin{pmatrix} 2.30 & 0.89 & 0.53 & 1.07 \\ 0.89 & 2.88 & 0.87 & 1.35 \\ 0.53 & 0.87 & 3.62 & 1.11 \\ 1.07 & 1.35 & 1.11 & 3.60 \end{pmatrix}$$

利用[V, D]=eig(A)得:

```
V =
    0.8658    0.1968    0.2961    0.3521
   -0.4463    0.7064    0.2603    0.4837
    0.0822    0.0201   -0.8573    0.5078
   -0.2108   -0.6796    0.3311    0.6198
```

```
D =
    1.6310         0         0         0
         0    1.8540         0         0
         0         0    2.7441         0
         0         0         0    6.1709
```

在命令行输入V*V'得：

```
ans =
    1.0000   -0.0000    0.0000    0.0000
   -0.0000    1.0000    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000    1.0000         0
    0.0000    0.0000         0    1.0000
```

可知 eig 所计算得到特征向量矩阵V已经是正交矩阵，则计算 *A*的5次幂可用如下命令完成：

```
V*D.^5*V'
```

输入A^5-V*D.^5*V'得：

```
ans =

   1.0e-11 *

   -0.0227   -0.0227   -0.0909   -0.0455
   -0.0227   -0.0455   -0.1364   -0.0455
   -0.0909   -0.1364   -0.1819   -0.1819
   -0.0227   -0.0455   -0.1364         0
```

说明二者相差很小。

补充1：图像与矩阵关系

```
clear; close all
I = imread('color_img.png'); % 可换为任意你想要的输入的图片
I = double(I)/255;
figure,
subplot(2,2,1), imshow(I); title('show color fig.')
subplot(2,2,2), imshow(I(:,:,1)); title('show color fig.')
subplot(2,2,3), imshow(I(:,:,2)); title('show color fig.')
subplot(2,2,4), imshow(I(:,:,3)); title('show color fig.')

G = rgb2gray(I);
W = G;
figure,imshow(G); title('gray Img.')

G(50:100, :) = 0;  % 让图像某行为0（黑色）
figure,imshow(G); title('Img.1')
G(:, 50:100) = 1;  % 让图像某列为0（黑色）
figure,imshow(G); title('Img.2')
G(50:100, :) = [];  % 删除图像某行
figure,imshow(G); title('Img.3')
G(:, 50:100) = [];  % 删除图像某列
figure,imshow(G); title('Img.4')

W = W + rand(size(W));
figure,imshow(W); title('Img.5')
```

补充2：主成分分析（PCA）及人脸压缩与恢复应用

- PCA是一种经典的数据降维方法（为什么要降维？）
- 能将数据如 $\mathbf{x} \in R^{1xN}$ 降到 $z \in R^{1xn}$, 其中$n < N$

举例1： 如何将 m 个 $\mathbf{x}_i \in R^{1xN}$ ($X \in R^{m \times N}$)降维(压缩)至 $\mathbf{z}_i \in R^{1xn}$ ($Z \in R^{m \times n}$)？

Step 1: 数据预处理（mean normalization, 为什么？）

a) $\mu_i = mean(x_i), s_i = std(x_i)$

b) $x_i = \dfrac{x_i - \mu_i}{s_i}$

Step 2: 计算协方差矩阵

$$\Sigma = \frac{1}{m} X^T X, \quad \text{where } X \in R^{m \times N}$$

Step 3: 计算协方差矩阵的奇异值分解（SVD）

$$\Sigma = USV^T$$

(Matlab命令： `[U,S,V] = svd(`Σ`);`)

Step 4: 提取U的前n列向量构造降维矩阵（n为你想降到的维数）

```
Ureduce = U(:, 1:n)
```

Step 5: 最终得到降维(压缩)数据Z

```
Z = X*Ureduce;
```

举例2： 如何将 m 个降维(压缩)数据$\mathbf{z}_i \in R^{1xn}$ ($Z \in R^{m \times n}$) 恢复(解压)出原来数据 $\mathbf{x}_i \in R^{1xN}$ ($X \in R^{m \times N}$)？

Step 1: `Ureduce = U(:, 1:n)`进行转置，并进行如下操作即可：

$$X_{recover} = Z * Ureduce^T;$$

详见PCA_face文件下人脸压缩与恢复代码样例：
PCA_face/demo_pca.m

为什么用协方差矩阵：https://blog.csdn.net/a10767891/article/details/80288463

学到了什么?

矩阵运算函数

线性方程组求解的应用

应用实验：矩阵的幂

补充1：图像与矩阵关系

补充2：主成分分析（PCA）及人脸压缩与恢复应用