

《数学实验》第14讲

主要内容:

最优化基础、MATLAB优化工具箱简介

一元函数极值问题、求解与案例

线性规划模型与模型求解

一、最优化简介

- 最优化是近几十年形成的一门学科，它主要运用数学方法寻找待优化问题的最佳决策方案，为决策者提供科学依据。
- 最优化方法已经在经济管理，科学计算、工程设计等领域得到了广泛地应用。
- 从数学上讲，最优化方法就是求解一元或多元函数的极小值或最小值的计算方法。

二、最优化数学模型

极小化

目标函数

$$\min f(x_1, \dots, x_n)$$

s.t.

受限制于

$$h_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$g_j(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

约束条件

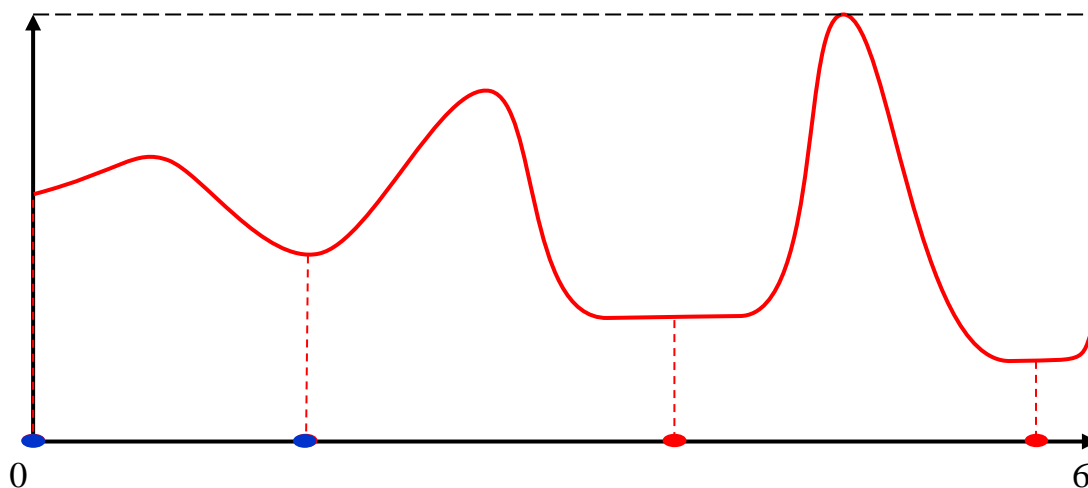
三、迭代下降算法

- (1) 首先给出目标函数 $f(X)$ 的一个初始迭代点 X^k , 置 $k = 0$;
- (2) 然后按照一定规则产生 X^k 处的一个下降方向 P^k ;
- (3) 再沿方向 P^k 搜索得到下一个迭代点 X^{k+1} , 使得 $f(X^{k+1}) < f(X^k)$;
- (4) 若满足停机条件则算法终止迭代, 并输出 X^k ; 否则置 $k = k+1$, 转步骤(2)。

按照上面的过程, 一般会产生一个收敛的迭代序列 $\{X^k\}$ 。在实际计算中, 若满足停机条件, 则将当前迭代点当作准确解的近似值。

四、局部极小点和全局极小点

设 $f: D \in R^n \rightarrow R$, 若存在 $X^* \in D$ 及实数 $a > 0$, 使得 $\forall X \in N^0(X^*, a) \cap D$ 都有 $f(X^*) \leq f(X)$, 则称 X^* 为 $f(X)$ 的局部极小点; 若 $f(X^*) < f(X)$, 则称 X^* 为 $f(X)$ 的局部严格极小点。



五、MATLAB优化工具箱中主要命令

命令：

`fminunc()`

解释：

求解多变量无约束最优化问题

数学模型：

$$\min f(x_1, \dots, x_n)$$

算法：

基于导数的算法：拟牛顿方法、信赖域方法

五、MATLAB优化工具箱中主要命令

命令：

fmincon()

解释：

求解多变量有约束最优化问题

数学模型：

$$\begin{aligned} & \min f(x_1, \dots, x_n) \\ & s.t. \quad h_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i = 1, \dots, m; \\ & \quad \quad g_j(x_1, \dots, x_n) \geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

算法：

信赖域法、有效集法、内点法、序列二次规划

五、MATLAB优化工具箱中主要命令

命令:

linprog()

解释:

求解线性规划问题

数学模型:

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T X \\ \text{s.t.} \quad & AX = b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

算法:

内点法、（对偶）单纯形法、有效集法

五、MATLAB优化工具箱中主要命令

命令：

`intlinprog()`

MATLAB r2014b
及其以后版本

解释：

求解混合整数线性规划问题

数学模型：

$$\min C^T X$$

$$s.t. \quad AX = b; X \geq 0$$

算法：

$$\exists x_i \in Z$$

分支定界法

五、MATLAB优化工具箱中主要命令

命令：

`ga()`

MATLAB r2008a
及其以后版本

解释：

求解困难、复杂、多态最优化问题的全局最优解

算法：

遗传算法

MATLAB优化工具箱主要命令简介

命令名	解释
fminbnd()	求 单变量无约束 （箱约束，边界约束） 最优化问题 黄金分割法，抛物线插值法
fminsearch()	求解 多变量无约束 最优化问题 基于免导数的算法：Nelder-Mead单纯形方法
fminunc()	求解 多变量无约束 最优化问题 基于导数的算法：拟牛顿方法、信赖域方法

MATLAB优化工具箱主要命令简介

命令名	解释
linprog()	求解线性规划问题 内点法、（对偶）单纯形法、有效集法
intlinprog()	求解混合整数线性规划问题 分支定界法
fmincon()	求解多变量有约束最优化问题 信赖域法、有效集法、内点法、序列二次规划
ga()	求解困难、复杂、多态最优化问题的全局最优解 遗传算法

一元函数极值求解函数fminbnd

示例：已知电子元件输出电压 R 和输入电压 t 有下面的关系：

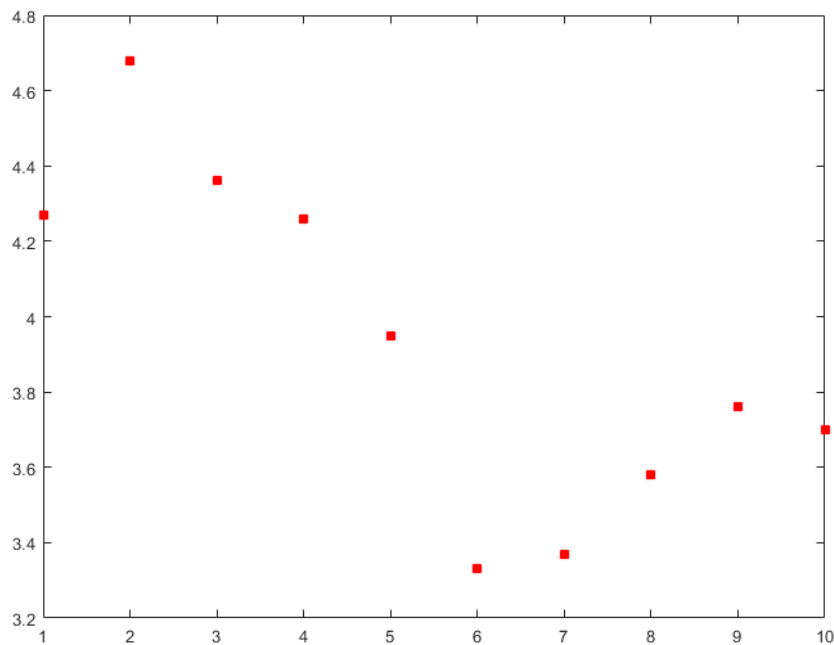
$$R(t) = \frac{x_1}{t + 28}$$

这里， x_1 为待定参数。通过实验测得如下数据：

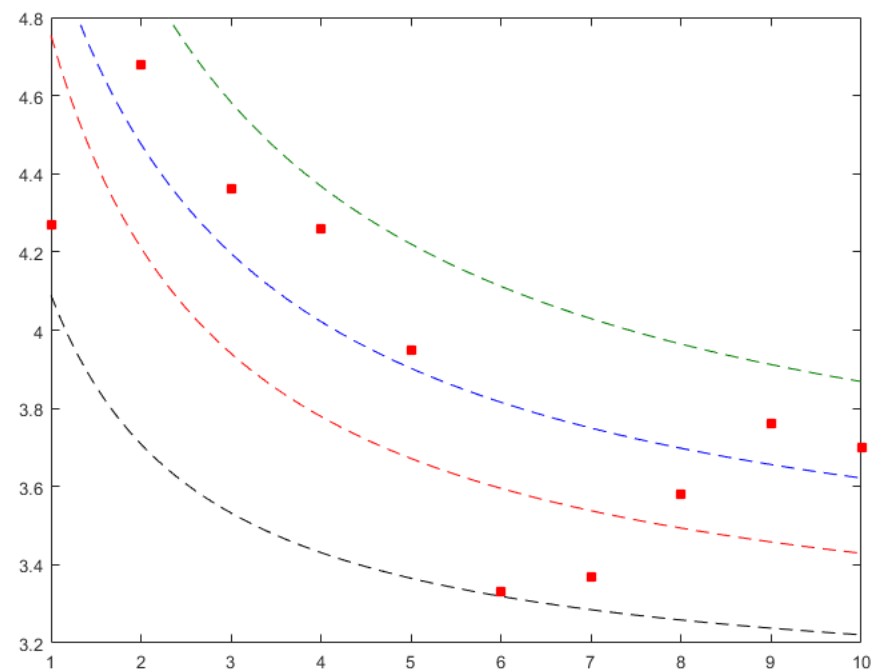
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	4.27	4.68	4.36	4.26	3.95	3.33	3.37	3.58	3.76	3.70

问：如何根据这些测量数据来确定参数 x_1 ？

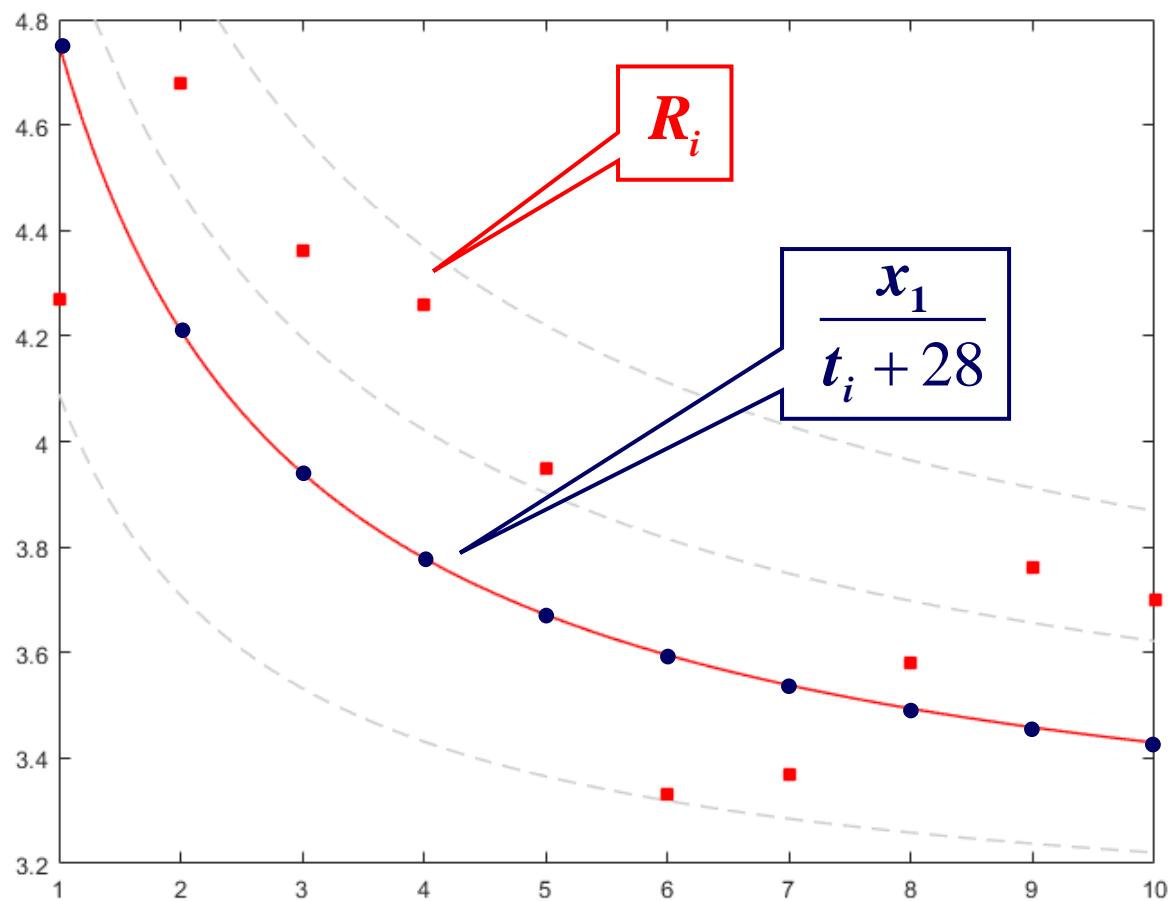
分析:



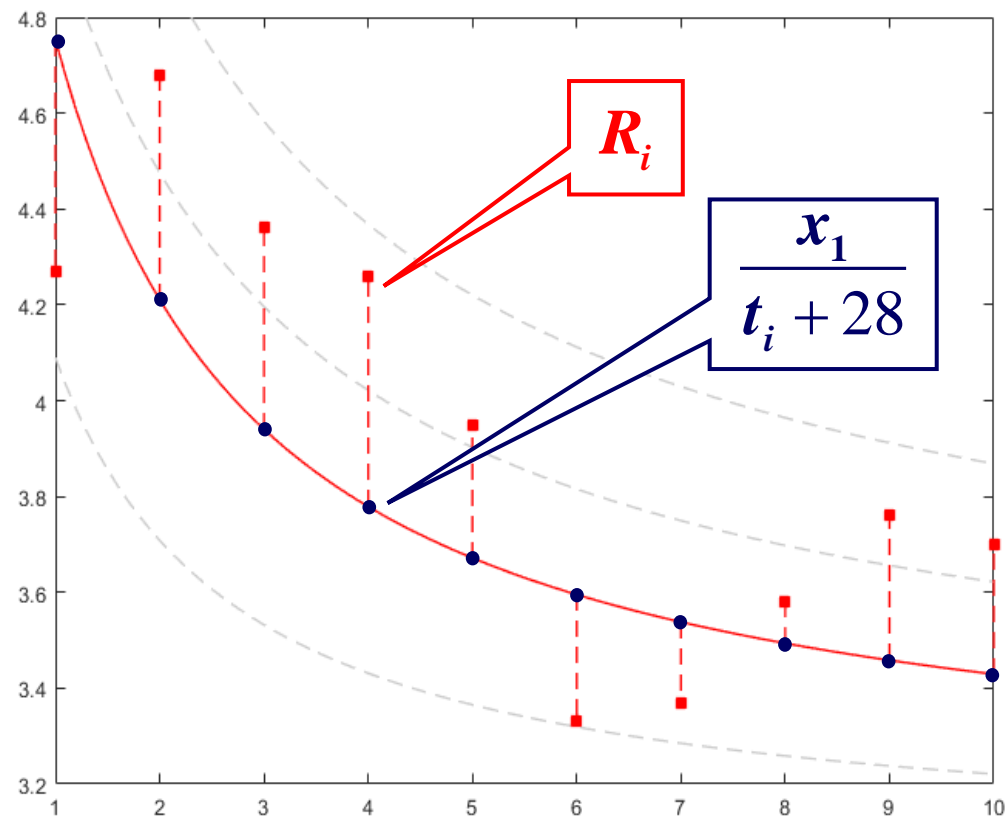
分析:



分析:



分析:



分析:

$$\min \sum_{1 \leq i \leq 10} \left(R_i - \frac{x_1}{t_i + 28} \right)^2$$

回顾: 在微积分中, 如何求解一元函数 $f(x)$ 的极小值?

- (1) 求出 $f(x)$ 在所讨论区间的所有驻点和不可导点。
- (2) 考察导函数在这些点左右两侧符号的变化, 判定它们是否为极值点。
- (3) 求出 $f(x)$ 的极小值。

分析:

$$\min \sum_{1 \leq i \leq 10} \left(R_i - \frac{x_1}{t_i + 28} \right)^2$$

$$\text{令 } f(x_1) = \sum_{1 \leq i \leq 10} \left(R_i - \frac{x_1}{t_i + 28} \right)^2$$

$$\text{解 } \frac{df}{dx_1} = 0$$

分析:

```
clc
clear all
syms x1 t
R = (x1./(t+28));
ti = 1:10;
Ri = [4.27, 4.68, 4.36, 4.26, 3.95, 3.33,
3.37, 3.58, 3.76, 3.70];
F = sum((Ri-subs(R, t, ti)).^2)
Xmin = double(solve(diff(F,x1)))
Fmin = double(subs(F,x1,Xmin))
```

总结: 解析解, 过程繁琐, 不易实现, 很难或不能得到解析解, 高低版本运行时间差别

Xmin = 130.5342 Fmin = 0.7313

求单变量无约束（边界约束）最优化问题

$$\min_{x_1 \leq x \leq x_2} f(x)$$

命令：

$$[xmin, ymin] = fminbnd(fun, x1, x2)$$

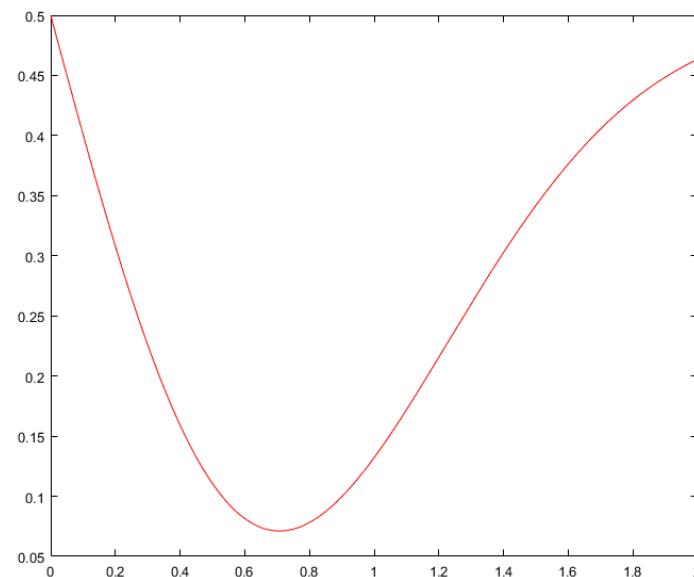
这里，fun是目标函数，[x1, x2]是搜索区间，xmin、ymin分别是目标函数的极小点、极小值。

例1 求一元函数 $f(x) = 0.5 - x\exp(-x^2)$ 在区间 $[0, 2]$ 内的极小值。

```
fun = inline('0.5-x*exp(-x^2)');  
[xmin, ymin] = fminbnd(fun, 0, 2)  
ezplot(fun, [0, 2])
```

xmin = 0.7071

ymin = 0.0711



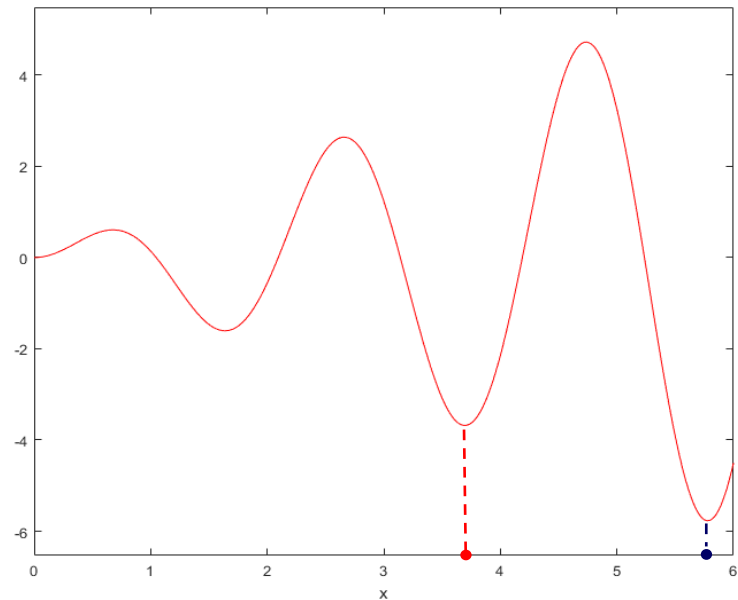
例2 求一元函数 $f(x) = x\sin(3x)$ 在区间 $[0, 6]$ 内的极小值。

```
[xmin, ymin] = fminbnd('sin(3*x)*x', 0, 6)
ezplot(fun, [0, 6])
```

xmin = 3.6952

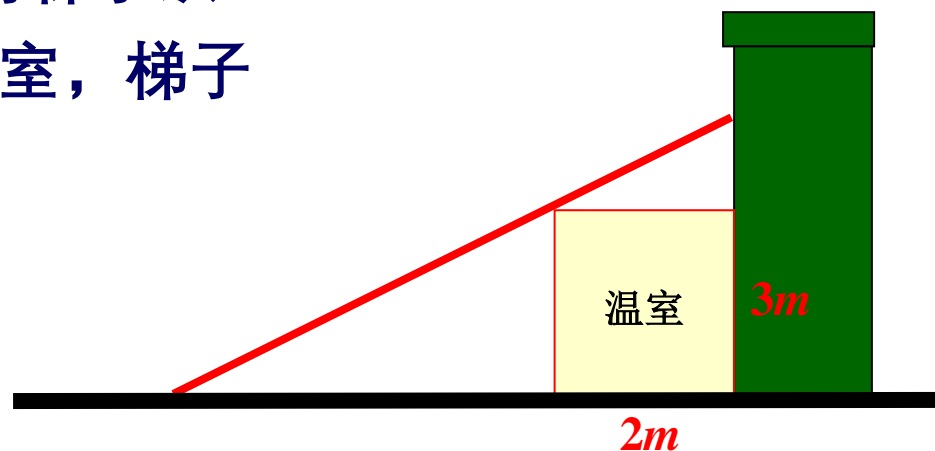
ymin = -3.6802

总结：近似解(数值解)，过程简洁，容易实现，但要确定搜索区间。



梯子问题

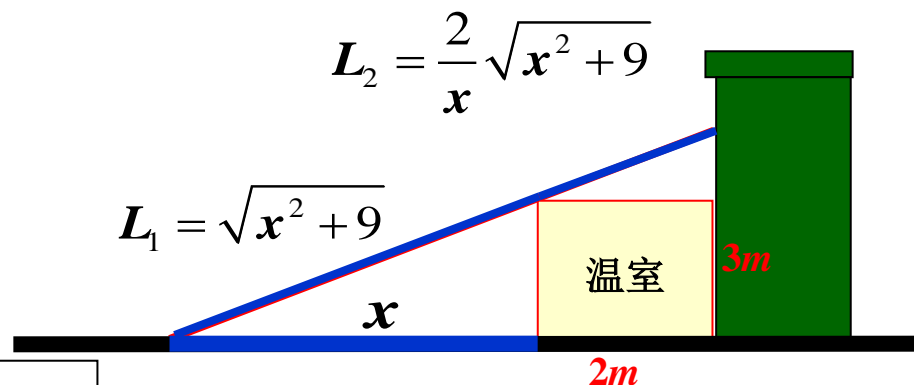
花园靠楼房处有一温室，温室伸入花园2米，高3米。温室上方是楼房窗台，要将梯子从花园地上放靠在楼房墙上不损坏温室，梯子长度至少应该为多少米？



模型一：设梯子的长度为 L ，梯子与温室的距离为 x ，则有

$$L(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)\sqrt{x^2 + 9}$$

$$x \in (0, +\infty)$$



```
syms x
```

```
L = (1+2/x)*sqrt(x^2+9);
```

```
g = diff(L);
```

```
xmin = solve(g, 'x')
```

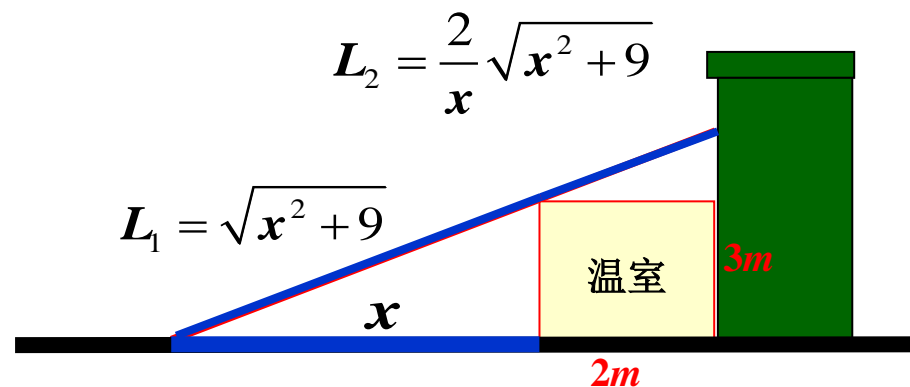
```
Lmin = subs(L, x, xmin)
```

注：不同版本运行结果有所差异；xmin的解析解为 $18^{(1/3)}$ 。

模型一： 设梯子的长度为 L ，梯子与温室的距离为 x ，则有

$$L(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right) \sqrt{x^2 + 9}$$

$$x \in (0, +\infty)$$



```
L = inline(' (1+2/x)*sqrt(x^2+9) ')\n[xmin, Lmin] = fminbnd(L, 0, 500)
```

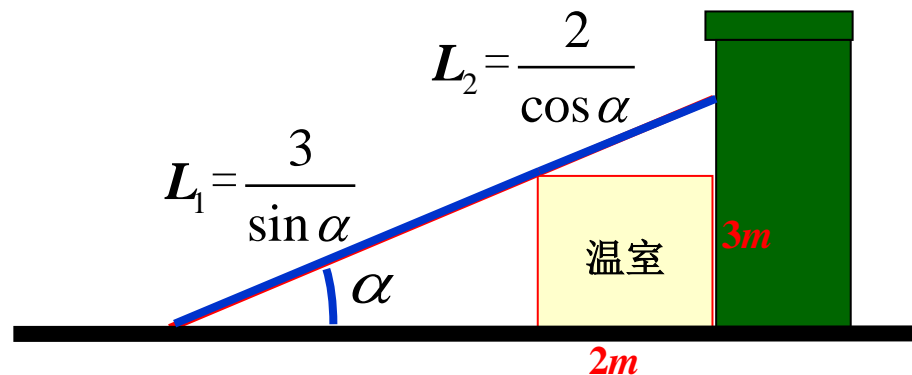
$$x_{\min} = 2.6207$$

$$L_{\min} = 7.0235$$

模型二： 设梯子的长度为 L ，梯子与地面的夹角为 α ，则有

$$L(\alpha) = \frac{3}{\sin \alpha} + \frac{2}{\cos \alpha}$$

$$\alpha \in (0, \pi/2)$$



```
L = inline('3/sin(alpha)+2/cos(alpha)')
```

```
[alpha, Lmin] = fminbnd(L, 0, pi/2)
```

alpha = 0.8528

Lmin = 7.0235

MATLAB中线性规划问题标准形式

$$\begin{array}{ll}\min & C^T X \\ \text{s.t.} & AX \leq b \\ & A_{eq} X = b_{eq} \\ & Lb \leq X \leq Ub\end{array}$$

决策变量: $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$

目标函数系数: $C = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$

不等式线性约束矩阵和向量: A, b

等式线性约束矩阵和向量: A_{eq}, b_{eq}

边界约束向量: Lb, Ub

求解线性规划命令**linprog**使用格式
(注意命令中的顺序)

(1) $x = \text{linprog}(C, A, b)$

$[x, fval] = \text{linprog}(C, A, b)$

(2) $x = \text{linprog}(C, A, b, Aeq, beq)$

$[x, fval] = \text{linprog}(C, A, b, Aeq, beq)$

(3) $x = \text{linprog}(C, A, b, Aeq, beq, Lb, Ub)$

$[x, fval] = \text{linprog}(C, A, b, Aeq, beq, Lb, Ub)$

例1 建筑公司承建办公楼和住宅楼。建办公楼将获利润**500元/平方米**，建住宅楼获利润**600元/平方米**，总建筑面积不少于**5000m²**，办公楼的面积不能大于**5000m²**，住宅楼不能大于**3000m²**

假定公司当年建办公楼 **x_1** 平方米，建住宅楼 **x_2** 平方米。

以所得利润最大为目标，得目标函数

$$z = 500x_1 + 600x_2$$

根据招标单位的要求，约束条件为

$$x_1 + x_2 \geq 5000$$

$$x_1 \leq 5000$$

$$x_2 \leq 3000$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

解：标准形式

$$\begin{array}{ll}\min & -500x_1 - 600x_2 \\s.t. & -x_1 - x_2 \leq -5000 \\& x_1 \leq 5000 \\& x_2 \leq 3000 \\& x_1 \geq 0 \\& x_2 \geq 0\end{array}$$

$$C = \begin{bmatrix} -500 \\ -600 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -5000 \\ 5000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

程序：

```
C = [500, 600];  
A = [-1, -1; 1, 0; 0, 1];  
b = [-5000; 5000; 3000];  
Aeq = [];  
beq = [];  
Lb = [0; 0];  
Ub = [inf; inf];  
x = linprog(-C, A, b, Aeq, beq, Lb, Ub);  
z = C*x
```

运行结果： $x = 5000 \ 3000$

$z = 4300000$

建立线性规划问题数学模型

- 一组决策变量 (x_1, x_2, \dots, x_n) 表示某套方案;
- 以决策变量的线性函数作为目标函数;
- 一组线性不等式或线性等式为约束条件。



明确问题的目标



假设一组决策变量



考虑目标函数



考虑约束条件

建模练习(10min) 提示: linprog

例2 某工厂制造A、B两种产品，A每吨用煤9吨，电4千瓦，3个工作日；制造B每吨用煤5吨,电5千瓦，10个工作日。制造A和B每吨分别获利7000元和12000元，该厂可利用资源有煤360吨，电力200千瓦，工作日300个。问A、B各生产多少吨获利最大。

	A	B	上限
煤(吨)	9	5	360
电(千瓦)	4	5	200
工作日(天)	3	10	300
利润(千元)	7	12	

建模练习(5 min)

某厂生产两种产品,产一吨甲产品用A资源 3吨、 B资源 4m^3 ;产一吨乙产品用A资源2吨, B资源 6m^3 , C资源7个单位.一吨甲产品和乙产品分别价值7万元和5万元,三种资源分别限制为90吨、 200m^3 和210个单位.建立描述生产两种产品使总价值最高的线性规划数学模型?

	甲	乙	上限
资源A	3	2	90
资源B	4	6	200
资源C		7	210
价值	7	5	

最优化基础、MATLAB优化工具箱简介

一元函数极值问题、求解与案例

线性规划模型与模型求解