《数学实验》第14讲

主要内容：

- 最优化基础、MATLAB优化工具箱简介
- 一元函数极值问题、求解与案例
- 线性规划模型与模型求解

最优化基础、MATLAB优化工具箱简介

极小值(目标函数) → f

极小值点

一、最优化简介

- 最优化是近几十年形成的一门学科，它主要运用数学方法寻找待优化问题的最佳决策方案，为决策者提供科学依据。
- 最优化方法已经在经济管理，科学计算、工程设计等领域得到了广泛地应用。
- 从数学上讲，最优化方法就是求解一元或多元函数的极小值或最小值的计算方法。

$\min f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$　　$\min f(x_1)$

$\to x_1, x_2, \cdots, x_n = ?$

二、最优化数学模型

$x_1, \cdots, x_n$

极小化　　目标函数

$$\min f(x_1, \cdots, x_n) \Rightarrow x_1 = ,\ x_2 = ,\ \cdots,\ x_n =$$

s.t. 受限制于

$$h_i(x_1, \cdots, x_n) = 0,\ i = 1, \cdots, m;$$

$$g_j(x_1, \cdots, x_n) \geq 0,\ j = 1, \cdots, n.$$

约束条件

$\min: f(x) = x^2$

s.t. $1 \leq x \leq 2$

$x^* = 1$

$f(x^*) = f(1) = 1$

$f'(x) = 0$

$x^* = 1$

三、迭代下降算法

$\min f(X)$

$|X^{k+1}-X^{k}| < tol$

$k=0 \quad X^0 = 1$

$f(X^0)=$

(1) 首先给出目标函数 $f(X)$ 的一个初始迭代点 X^k, 置 $k = 0$;

(2) 然后按照一定规则产生 X^k 处的一个下降方向 P^k;

(3) 再沿方向 P^k 搜索得到下一个迭代点 X^{k+1}，使得 $f(X^{k+1}) < f(X^k)$;

(4) 若满足停机条件则算法终止迭代，并输出X^k；否则置 $k = k+1$，转步骤(2)。

$P^k = ?$

$f(X^1) < f(X^0)$

按照上面的过程，一般会产生一个收敛的迭代序列 $\{X^k\}$。在实际计算中，若满足停机条件，则将当前迭代点当作准确解的近似值。

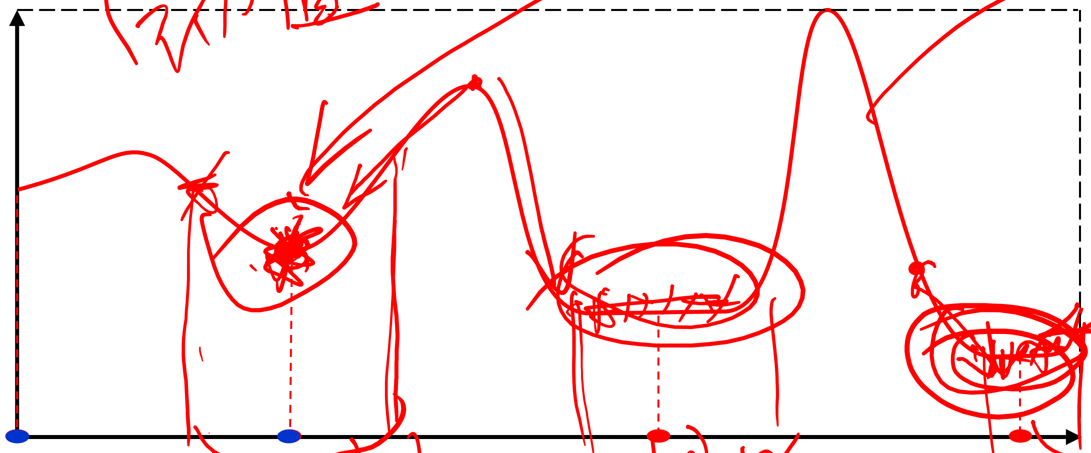
$f(X^0)$

最速下降法

四、局部极小点和全局极小点

设 $f: D \in R^n \to R$，若存在 $X^* \in D$ 及实数 $a > 0$，使得 $\forall X \in N^0(X^*, a) \cap D$ 都有 $f(X^*) \leqslant f(X)$，则称 X^* 为 $f(X)$ 的**局部极小点**；若 $f(X^*) < f(X)$，则称 X^* 为 $f(X)$ 的~~局部严格极小点~~。

初值



极小点

① 全局极小点

② 局部极小点

不同类型优化 → 不同工具（函数）

五、MATLAB优化工具箱中主要命令

命令：

fminunc( )

解释：

un constraint

求解多变量无约束最优化问题

数学模型：

$$\min f(x_1,\cdots,x_n)$$

算法：

基于导数的算法：拟牛顿方法、信赖域方法

数学算法

应用数学家

五、MATLAB优化工具箱中主要命令

help fmincon()

命令：

fmincon( )

import

例18. 解释.

解释：

求解多变量有约束最优化问题

数学模型：

$$\min\ f(x_1,\cdots,x_n)$$

$$s.t.\begin{cases} h_i(x_1,\cdots,x_n)=0, i=1,\cdots,m; \\ g_j(x_1,\cdots,x_n)\geq 0, j=1,\cdots,n. \end{cases}$$

constrain

优化模型

算法：

信赖域法、有效集法、内点法、序列二次规划

五、MATLAB优化工具箱中主要命令

命令：

linprog( )

linear

programming

解释：

求解线性规划问题

数学模型：

$$\min \; C^T X = c_1x_1+\cdots+c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} AX = b & \text{等式} \\ X \geq 0 & \text{不等式} \end{cases}$$

算法：

内点法、（对偶）单纯形法、有效集法

五、MATLAB优化工具箱中主要命令

命令：

intlinprog( )

MATLAB r2014b
及其以后版本

2014 b 版以

解释：

求解混合整数线性规划问题

数学模型：

$$\min\ C^T X$$

$$s.t.\quad AX = b;\ X \geq 0$$

$$\exists x_i \in Z$$

算法：

分支定界法

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$x_i \in$ 整数

五、MATLAB优化工具箱中主要命令

命令：

ga( )

MATLAB r2008a
及其以后版本

2008a后

解释：

求解困难、复杂、多态最优化问题的全局最优解

算法：

遗传算法

MATLAB优化工具箱主要命令简介

命令名	解释
fminbnd()	求单变量无约束（箱约束，边界约束）最优化问题 黄金分割法，抛物线插值法
fminsearch()	求解多变量无约束最优化问题 基于免导数的算法：Nelder-Mead单纯形方法
fminunc()	求解多变量无约束最优化问题 基于导数的算法：拟牛顿方法、信赖域方法

MATLAB优化工具箱主要命令简介

命令名	解释
linprog()	**求解线性规划问题** 内点法、（对偶）单纯形法、有效集法
intlinprog()	**求解混合整数线性规划问题** 分支定界法
fmincon()	**求解多变量有约束最优化问题** 信赖域法、有效集法、内点法、序列二次规划
ga()	**求解困难、复杂、多态最优化问题的全局最优解** 遗传算法

一元函数极值问题、求解与案例

一元函数极值求解函数fminbnd

示例：已知电子元件输出电压R和输入电压t有下面的关系：

$$R(t)=\frac{x_1}{t+28}$$

求和2

$$R_1 - R(t_1) = \frac{x_1}{t_1+28}$$

$$R_2 - R(t_2) = \frac{x_1}{t_2+28}$$

$$R_{10} - R(t_{10}) =$$

这里，x_1为待定参数。通过实验测得如下数据：

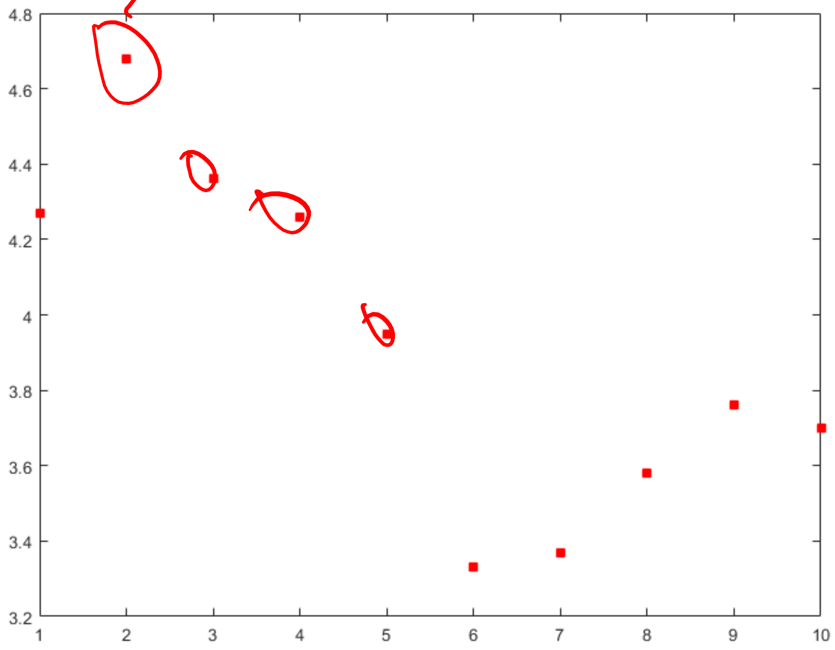
实际

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	4.27	4.68	4.36	4.26	3.95	3.33	3.37	3.58	3.76	3.70

min

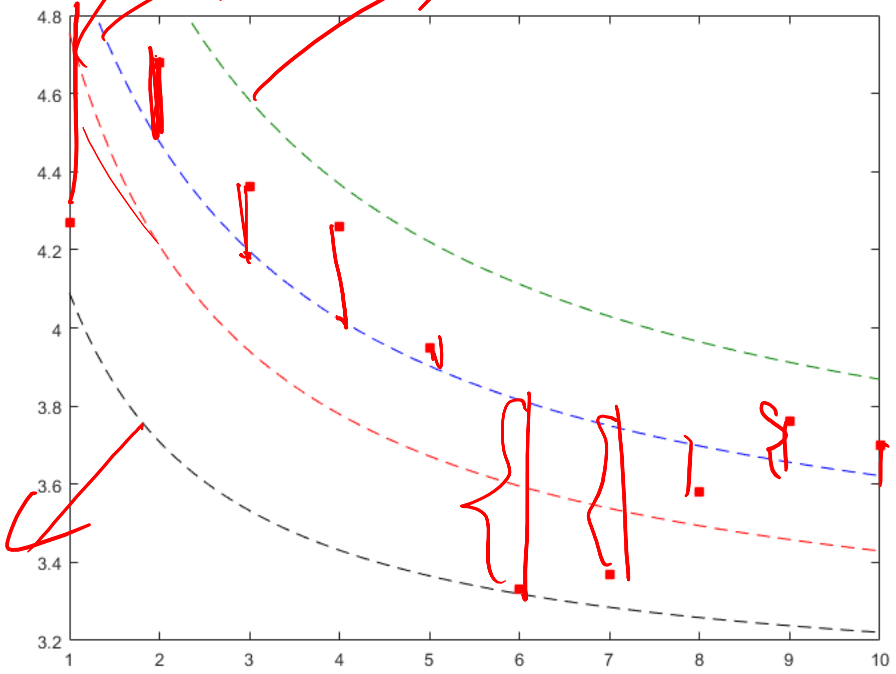
问：如何根据这些测量数据来确定参数x_1？

分析：



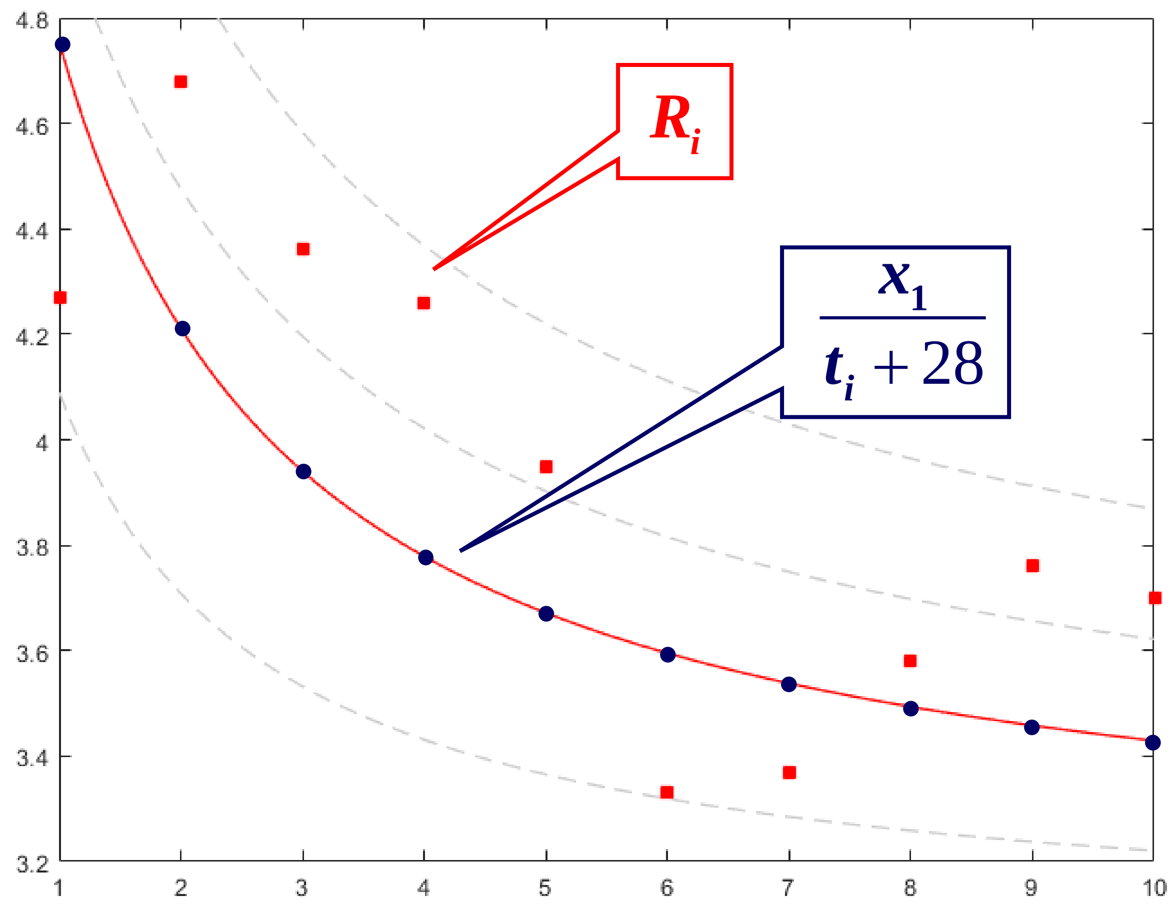
分析：

$x^k \quad f(t) \quad \frac{x^k}{t+28}$

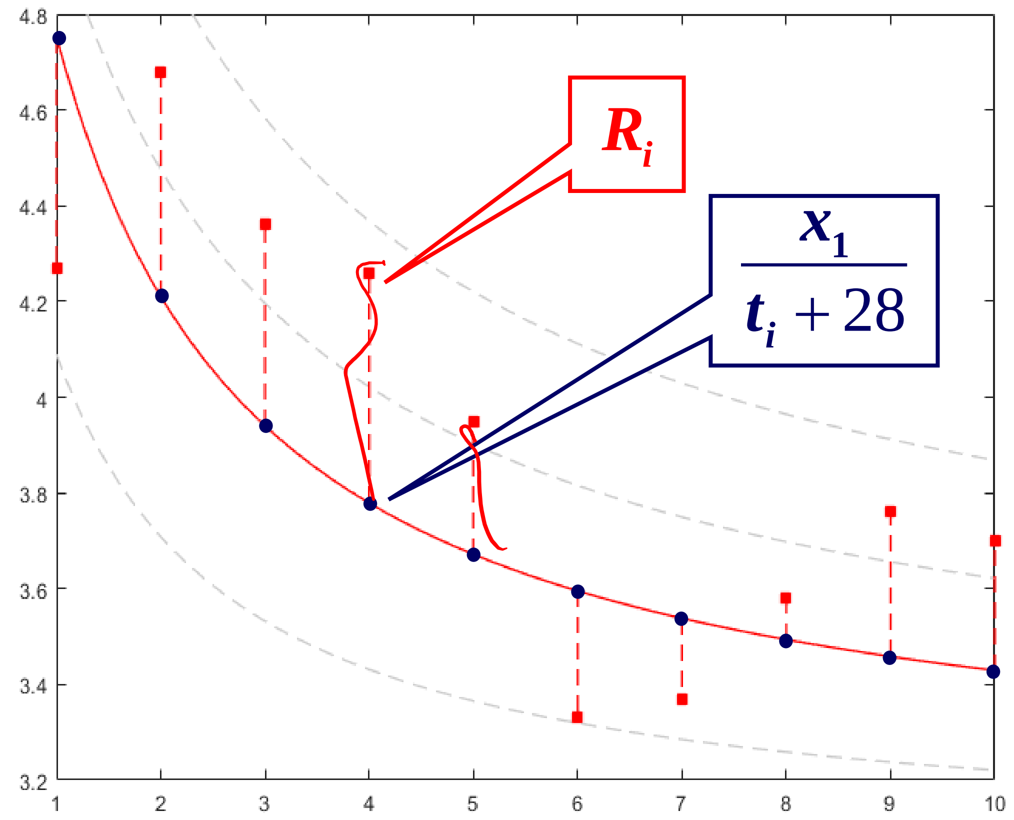


一元函数极值问题、求解与案例

分析：



分析：



目标函数

分析：

$$\min_{x_1} \sum_{1\le i\le 10}\left(R_i-\frac{x_1}{t_i+28}\right)^2 = f(x_1)$$

无约束
单变
优化
fminbnd

回顾： 在微积分中，如何求解一元函数 $f(x)$ 的极小值？

高中

（1）求出 $f(x)$ 在所讨论区间的所有驻点和不可导点。
（2）考察导函数在这些点左右两侧符号的变化，判定它们是否为极值点。
（3）求出 $f(x)$ 的极小值。

分析：

$$\min \sum_{1\le i\le 10}\left(R_i-\frac{x_1}{t_i+28}\right)^2 = f(x_1)$$

令 $f(x_1)=\sum_{1\le i\le 10}\left(R_i-\frac{x_1}{t_i+28}\right)^2$

解 $\frac{df}{dx_1}=0 \Longrightarrow x_1^*=$

一元函数极值问题、求解与案例

分析：

```
clc
clear all
syms x1 t
R = (x1./(t+28));
ti = 1:10;
Ri = [4.27, 4.68, 4.36, 4.26, 3.95, 3.33,
3.37, 3.58, 3.76, 3.70];
F = sum((Ri-subs(R, t,ti)).^2)
Xmin = double(solve(diff(F,x1)))
Fmin = double(subs(F,x1,Xmin))
```

int(

→ 求极小值点

$f(x_1)=0 \Rightarrow x_1^* =$

fminbnd

Xmin = 130.5342　　**Fmin = 0.7313**

总结：解析解，过程繁琐，不易实现，很难或不能得到解析解，高低版本运行时间差别

一元函数极值问题、求解与案例

求单变量无约束（边界约束）最优化问题

$$\min_{x_1 \le x \le x_2} f(x)$$

极小点

极小值

命令：

[xmin, ymin] = fminbnd(fun, x1, x2)

这里，fun是目标函数，[x1，x2]是搜索区间，xmin、ymin分别是目标函数的极小点、极小值。

一元函数极值问题、求解与案例

例1 求一元函数 $f(x) = 0.5 - x\exp(-x^2)$ 在区间[0，2]内的极小值。

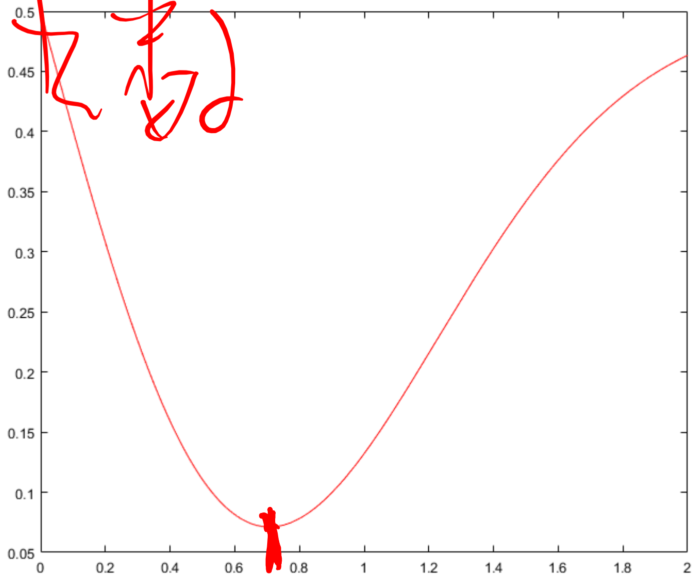
e^{-x^2}

```
fun = inline('0.5-x*exp(-x^2)');
[xmin, ymin] = fminbnd(fun,0,2)
ezplot(fun, [0, 2])
```

fun = @(x) 0.5-x

xmin = 0.7071

ymin = 0.0711

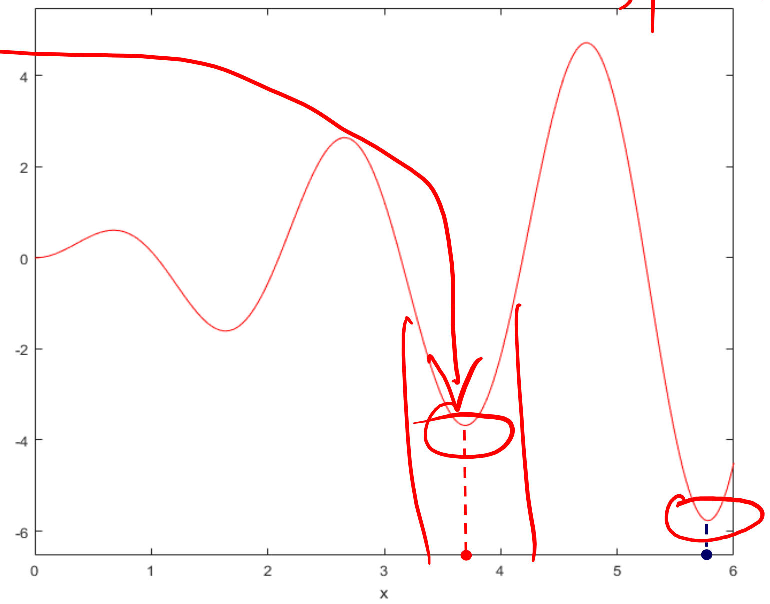


例2 求一元函数 $f(x) = x\sin(3x)$ 在区间[0，6]内的极小值。

```
[xmin, ymin] = fminbnd('sin(3*x)*x', 0, 6)
ezplot(fun, [0, 6])
```

xmin = 3.6952

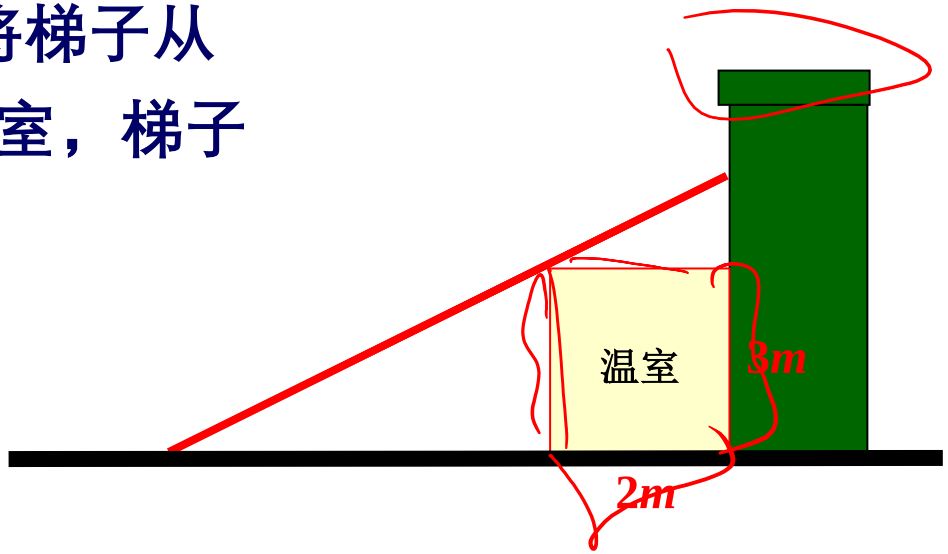
ymin = -3.6802



总结：近似解(数值解)，过程简洁，容易实现，但要确定搜索区间。

梯子问题

花园靠楼房处有一温室，温室伸入花园2米，高3米。温室上方是楼房窗台，要将梯子从花园地上放靠在楼房墙上不损坏温室，梯子长度至少应该为多少米？

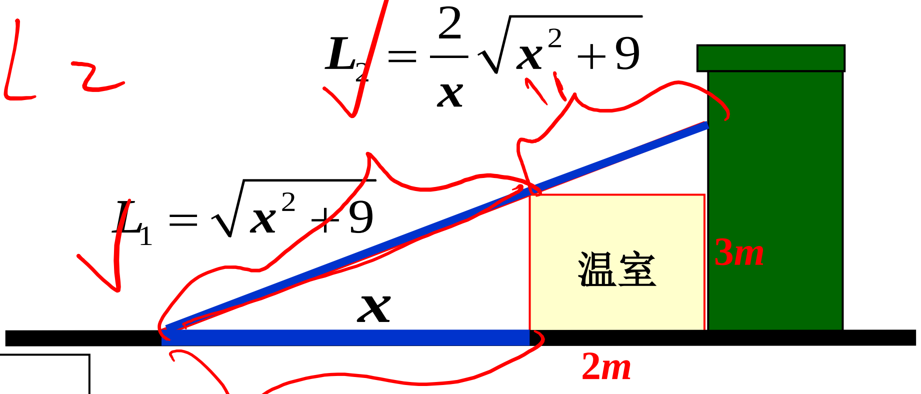


模型一：设梯子的长度为L，梯子与温室的距离为 x，则有

$$L(x)=(1+\frac{2}{x})\sqrt{x^2+9} = L_1 + L_2$$

$$x\in(0,+\infty)$$

$x>0$



解析

```
syms x
L = (1+2/x)*sqrt(x^2+9);
g = diff(L);
xmin = solve(g, 'x')
Lmin = subs(L, x, xmin)
```

$g=0$

Lmin

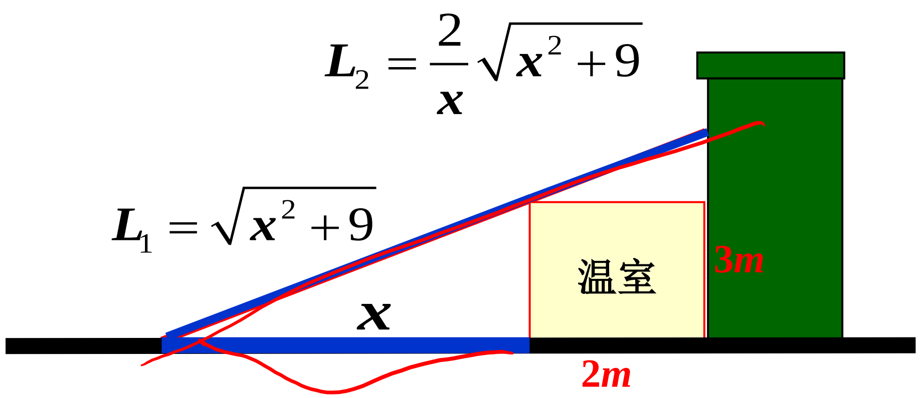
注：不同版本运行结果有所差异; xmin的解析解为18^(1/3).

解析解

模型一：设梯子的长度为L，梯子与温室的距离为 x，则有

$$L(x)=(1+\frac{2}{x})\sqrt{x^2+9}$$

$$x\in(0,+\infty)$$



2.6

```
L = inline('(1+2/x)*sqrt(x^2+9)')
[xmin, Lmin] = fminbnd(L, 0, 500)
```

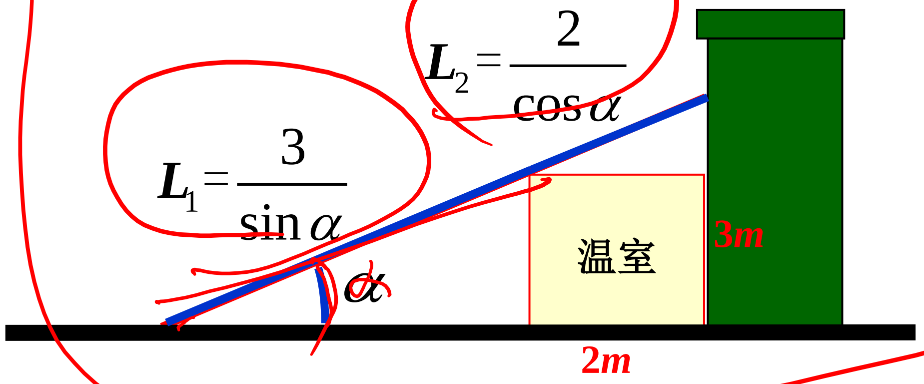
xmin = 2.6207
Lmin = 7.0235

一元函数极值问题、求解与案例

模型二：设梯子的长度为L，梯子与地面的夹角为α，则有

$$L(\alpha)=\frac{3}{\sin\alpha}+\frac{2}{\cos\alpha}$$

$$\alpha\in(0,\pi/2)$$




```
L = inline('3/sin(alpha)+2/cos(alpha)')
[alpha, Lmin] = fminbnd(L, 0, pi/2)
```

alpha = 0.8528

Lmin = 7.0235

线性规划模型与模型求解

MATLAB中线性规划问题标准形式

$$\begin{aligned} & \min C^T X \\ s.t. \quad & AX \le b \\ & A_{eq} X = b_{eq} \\ & Lb \le X \le Ub \end{aligned}$$

决策变量: $X = [x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n]^T$

目标函数系数: $C = [c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n]^T$

不等式线性约束矩阵和向量: $A,\ b$

等式线性约束矩阵和向量: $A_{eq},\ b_{eq}$

边界约束向量: $Lb,\ Ub$

求解线性规划命令linprog使用格式

（注意命令中的顺序）

(1) x = linprog(C, A, b)

[x,fval] = linprog(C, A, b)

(2) x = linprog(C,A,b,Aeq,beq)

[x,fval] = linprog(C,A,b,Aeq,beq)

(3) x = linprog(C,A,b,Aeq,beq,Lb,Ub)

[x, fval] = linprog(C,A,b,Aeq,beq,Lb,Ub)

例1 建筑公司承建办公楼和住宅楼。建办公楼将获利润500元/平方米，建住宅楼获利润600元/平方米，总建筑面积不少于5000m²，办公楼的面积不能大于5000m²，住宅楼不能大于3000m²

假定公司当年建办公楼x_1平方米，建住宅楼x_2平方米。

以所得利润最大为目标，得目标函数

$$z = 500x_1 + 600x_2$$

根据招标单位的要求，约束条件为

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 5000 \\ x_1 \qquad &\leq 5000 \\ x_2 &\leq 3000 \\ x_1 \qquad &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

解：标准形式

$$\begin{aligned} &\min -500x_1 - 600x_2 \\ s.t.\ & -x_1 - x_2 \le -5000 \\ & x_1 \le 5000 \\ & x_2 \le 3000 \\ & x_1 \ge 0 \\ & x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} -500 \\ -600 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -5000 \\ 5000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

程序：

```
C = [500,600];
A = [-1,-1;1,0;0,1;];
b = [-5000;5000;3000];
Aeq = [];
beq = [];
Lb = [0;0];
Ub = [inf;inf];
x = linprog(-C, A, b, Aeq, beq, Lb, Ub);
z = C*x
```

运行结果： x = 5000 3000

z= 4300000

建立线性规划问题数学模型

未知

- 一组决策变量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示某套方案；
- 以决策变量的线性函数作为目标函数；
- 一组线性不等式或线性等式为约束条件。

→ 明确问题的目标

→ 假设一组决策变量

→ 考虑目标函数

→ 考虑约束条件

假设 (x_1, x_2) → 目标式

标价 → 约束

建模练习(10min) 提示: linprog

例2 某工厂制造*A*、*B*两种产品，*A*每吨用煤9吨，电4千瓦，3个工作日；制造*B*每吨用煤5吨,电5千瓦，10个工作日。制造*A*和*B*每吨分别获利7000元和12000元，该厂可利用资源有煤360吨，电力200千瓦，工作日300个。问*A*、*B*各生产多少吨获利最大。

	A	B	上限
煤(吨)	9	5	360
电(千瓦)	4	5	200
工作日(天)	3	10	300
利润(千元)	7	12	

建模练习(5 min)

某厂生产两种产品,产一吨甲产品用A资源 3吨、 B资源 $4m^3$;产一吨乙产品用A资源2吨, B资源$6m^3$, C资源7个单位.一吨甲产品和乙产品分别价值7万元和5万元,三种资源分别限制为90吨、$200m^3$和210个单位.建立描述生产两种产品使总价值最高的线性规划数学模型?

	甲	乙	上限
资源A	3	2	90
资源B	4	6	200
资源C		7	210
价值	7	5	

学到了什么?

最优化基础、MATLAB优化工具箱简介

一元函数极值问题、求解与案例

线性规划模型与模型求解